Quaderni per l'insegnamento
Alta Scuola Pedagogica

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-51-0

A cura di Gianfranco Arrigo

Atti del Convegno di didattica della matematica 2004

Quaderni per l'insegnamento
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale

Indice

	Prefazione		7
I.	Conferenze		
	1.	Luis Radford La généralisation mathématique comme processus sémiotique	11
	2.	Ubiratan D'Ambrosio Una riflessione dell'etnomatematica: perché insegnare matematica?	29
	3.	Salvador Llinares Costruire le conoscenze necessarie per insegnare la matematica. Pratiche sociali e tecnologia	39
	4.	Gianfranco Arrigo Ostacoli epistemologici e didattici nell'apprendimento dell'infinito	57
	5.	Guy Brousseau Une modélisation de l'enseignement des mathématiques	71
	6.	André Delessert Que signifie «et cetera»?	93
	7.	Bruno D'Amore Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica	99
II.	Comunicazioni		
	1.	Martha Isabel Fandiño Pinilla «Diventare competente»: una sfida con radici antropologiche	109
	2.	Giovannina Albano Situazioni a-didattiche in ambienti di e-learning	113
	3.	Silvia Sbaragli Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico	117

4.	Aldo Frapolli Da Programma a... Piano di formazione per la matematica nella scuola media ticinese	121
5.	Alberto Piatti I miei primi contatti con la ricerca in didattica della matematica	125
6.	Giorgio Mainini Atolli matematici	127
7.	Claudio Beretta Il ruolo della SSIMF nello Stato federale	131

Prefazione

Questo convegno continua il discorso sulla teoria didattica iniziato con Matematica 2000, manifestazione svoltasi a Bellinzona in occasione dell'anno dedicato alla matematica.

La profondità delle riflessioni innescate da quell'evento non potevano infatti rimanere senza una nuova ventata di ossigeno, che giunge puntualmente dopo quattro anni, grazie all'organizzazione offerta dall'Alta Scuola Pedagogica. Come già avvenne nel 2000, gli oratori sono stati scelti accuratamente, grazie alla preziosa collaborazione del prof. Bruno D'Amore.

Il Ticino è un piccolo mondo, ma anche una realtà essenziale nel panorama culturale svizzero. La scuola ticinese vi appartiene di diritto ed è sempre stata consapevole del fatto che, in quanto scuola di una minoranza, non può essere inferiore né a quella di cultura tedesca né a quella romanda. Questa nostra peculiarità è sempre stata stimolo fondamentale per la promozione di una scuola di qualità: il passato ce lo insegna. Rimane quindi prioritaria la necessità di mantenere alta la qualità della nostra scuola, qualità che è determinata anche da una corretta formazione continua degli insegnanti. L'efficacia dell'attività in classe dipende anche dal costante aggiornamento delle conoscenze didattiche teoriche dei docenti.

Il Convegno di Didattica della matematica ha appunto lo scopo di mantenere alto l'interesse nei confronti dei principali problemi che attualmente si pongono nel delicato e meraviglioso processo di insegnamento-apprendimento di questa disciplina. Lo raggiunge se riesce a stabilire un collegamento diretto tra la ricerca didattica e la pratica in classe.

Ecco perché il Canton Ticino è orgoglioso di accogliere nei giorni 24 e 25 settembre 2004, a Locarno, nella sede dell'Alta Scuola Pedagogica, alcuni fra i più autorevoli didatti della matematica del mondo intero. I loro contributi sono accompagnati da interventi di insegnanti ticinesi e italiani, che informano sullo stato della didattica nelle regioni di lingua italiana.

La redazione degli Atti di questo convegno, realizzata grazie all'appoggio del Centro didattico cantonale, è un omaggio a tutti i partecipanti, relatori compresi, affinché le idee raccolte nei due giorni possano trovare una corretta sistemazione e servire poi da stimolo per rinnovate riflessioni didattiche.

I.

Conferenze

1. La généralisation mathématique comme processus sémiotique[1]

Luis Radford
École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne
Ontario, Canada

Siccome in una generalizzazione un fatto non può rinviare a sé stesso, ogni atto di generalizzazione presuppone il ricorso a qualcosa d'altro. Questa «altra cosa» è attinente al campo della rappresentazione. Il passaggio a generalizzazioni simboliche complesse pone difficoltà precise agli allievi che iniziano l'apprendimento dell'algebra. I nostri risultati ci mostrano che questo passaggio necessita della messa in atto di un sistema di significati che si trova in contrasto con i significati del linguaggio naturale e con una gamma di gesti ostensivi e iconici che, agendo insieme, permettono di situare l'esperienza matematica dell'allievo nel tempo e nello spazio. La messa in atto del nuovo sistema di significati obbliga allora l'allievo a situarsi all'esterno di questi riferimenti spazio-temporali.

1. Introduction

Le thème que j'aborderai ici porte sur la généralisation en mathématiques. Il s'agit d'un thème auquel j'ai commencé à m'intéresser il y a plusieurs années, en observant quatre classes d'enfants de 13 ans dans un programme longitudinal de recherche portant sur l'algèbre. Naturellement, on ne peut pas s'intéresser aux mathématiques sans s'intéresser en même temps à la généralisation, car, comme dit Mason (1996), la généralisation est le moteur des mathématiques. Mais, avant de conduire ce programme longitudinal de cinq ans, je ne m'étais pas occupé de la généralisation en tant que problème spécifique de recherche. C'est en remarquant les difficultés éprouvées par les élèves que je me suis aperçu des problèmes complexes entourant la généralisation. Ces problèmes m'ont apparu en premier lieu comme problèmes cognitifs. Cependant, pour pouvoir les formuler en tant que problèmes de recherche, il me fallait les conceptualiser en profondeur. Ce constat m'a amené à entreprendre une réflexion sur la généralisation sous l'angle de l'ontologie et de l'épistémologie. Comme il deviendra clair au cours de mon exposé, il est pratiquement impossible de travailler sur la généralisation sans entrer dans des considérations ontologiques et épistémologiques.

Au fur et à mesure que la réflexion théorique avançait, elle me permettait de mieux saisir les phénomènes cognitifs concrets que j'observais en salle de classe. En contrepartie, la production de nouvelles données concrètes exigeait souvent une interprétation plus fine de ces données et un approfondissement de la réflexion théorique. C'est à l'intérieur de ce processus dialectique entre réflexion conceptuelle et analyse de situations d'apprentissage que j'ai pu peu à peu formuler certains principes qui servent de fondement à une approche théorique qui se veut anthropologique par le rôle que joue le contexte historico-culturel dans la conceptualisation de la pensée mathématique.

1. Les résultats présentés ici dérivent d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada / The Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH/SSHRC).

Mon approximation anthropologique s'est développée, en partie, comme résultat du besoin de reconceptualiser l'activité cognitive. Kant nous a appris que tout savoir est le produit d'une activité cognitive. Si on veut comprendre la nature de ce savoir, il faut bien étudier l'activité cognitive qui l'a produit. Bien sûr, la tâche n'était pas mince. Mais il me semblait important d'aller au-delà de la conception cartésienne qui conçoit l'activité cognitive comme un processus intellectuel qui se déroule exclusivement à l'intérieur du sujet[2].

Dans un texte publié en 1997, je proposais de concevoir la pensée mathématique comme une pensée de nature intrinsèquement sociale, ancrée dans des modes de signification culturelle (Radford, 1997a). Mais, pour aller plus loin, il me fallait préciser davantage cet ancrage. Il m'était apparu évident, suite aux travaux de Lizcano (1993) sur les mathématiques chinoises et à ceux de Høyrup (1990) sur les mathématiques babyloniennes, que la généralisation n'est pas un processus qui se développe de façon naturelle. Il y a une multitude de directions possibles à chaque étape du développement. Comprendre la généralisation revient à comprendre la manière dont s'effectuent les choix de développement à la lumière de la pensée culturelle qui les soustendent. À l'époque, je ne pouvais formuler la question que de façon très large. Aujourd'hui, donc quelques 8 ou 9 années plus tard, je pourrais la reformuler de manière plus précise en utilisant, de façon métaphorique, un des concepts les plus profonds élaborés par Vygotski. Je pourrais dire que, à chaque époque, chaque culture crée des *zones proximales de développement* à l'intérieur desquelles s'effectuent les choix qui déterminent la direction qui suivra son développement.

C'est justement en m'inspirant de l'école socio-historique de Vygotski que j'ai été amené à examiner la relation entre signe et objet et à m'écarter du courant traditionnel qui considère les signes comme des indices de l'activité mentale et comme de simples «aides» à la pensée (Radford, 1998, 1999). Certains courants de la linguistique et de la psychologie qui s'inspirent du structuralisme, par exemple, distinguent entre deux plans: celui de la pensée proprement dite, qui, selon ces théories, se trouve gouverné par des «structures profondes» enfouies dans la tête et celui des «structures de surface» où l'on trouve les signes qui, toujours selon ces théories, ne sont que des *vestiges* des structures profondes. À l'opposé de l'approche cartésienne de l'activité mentale et des courants structuralistes, je me rangeais du côté des philosophes et des psychologues culturels (comme Wertsch, 1991, Kozoulin, 1990 et Zinchenko, 1985) qui insistent sur le rôle cognitif du signe. À la fin des années 1990, il m'a semblé que la réponse à la question que je cherchais au sujet des processus de généralisation pouvait se trouver en étudiant les mécanismes d'objectivation médiatisée du savoir culturel. C'est de ce côté que je me suis tourné ces dernières années dans mes recherches.

Voilà, donc, un court aperçu du cheminement qui m'a conduit à m'intéresser au problème de la généralisation. Je voudrais présenter ici deux «moments» particuliers de ce cheminement.

2. Pour être plus précis, cette idée d'activité cognitive trouve son inspiration dans la philosophie austère de St. Augustin. Si, par exemple, on veut retracer l'idée contemporaine très populaire selon laquelle les objets mathématiques sont *dans* notre tête, c'est St. Augustin et non pas Descartes ou Platon qu'on trouve en remontant la généalogie des idées (voir Radford, 2004).

D'une part, je voudrais montrer quelques éléments de la réflexion conceptuelle qui questionnent la généralisation sous un angle ontologique et épistémologique. Sans prétendre être exhaustif, je vais examiner les rapports qui peuvent exister entre le général et le particulier dans la théorie de la connaissance de Kant. Elle est importante pour notre discussion ici car elle s'inscrit dans une critique de la Raison qui n'hésite pas à soumettre au doute tout ce que la pensée occidentale avait tenu pour acquis jusqu'au XVII^e^ siècle, mais qui, curieusement, épargne les mathématiques. Il s'agit d'une critique qui, du point de vue anthropologique, échoue, mais qui en échouant s'ouvre sur une tentative de «sémiotisation» de l'objet mathématique.

D'autre part, je voudrais montrer quelques résultats concrets de ma recherche en salle de classe. Il ne faudrait pas perdre de vue que, comme je l'ai mentionné précédemment, ces deux volets sont interreliés et que la séparation que je fais ici à des fins d'exposition est tout à fait artificielle.

2. Quelques considérations théoriques sur la généralisation

Une des caractéristiques des mathématiques est que ses objets sont des objets «généraux». Quand nous énonçons une propriété sur les triangles ou sur les fonctions continues, ce n'est pas d'un triangle particulier ou d'une fonction continue particulière dont nous parlons, mais de l'objet général correspondant. La nature générale des objets mathématiques pose d'emblée deux problèmes différents. Un problème ontologique et un problème épistémologique. Le problème ontologique a trait à la façon d'être de cette généralité. On peut, par exemple, considérer que les objets mathématiques sont des réalités transcendantales. On peut, par contre, considérer que les objets mathématiques sont produits par la pensée humaine. Le problème épistémologique peut se résumer par la question suivante: comment arrivons-nous à connaître ces objets généraux, vu que nous n'avons accès à ces objets qu'à travers de représentations que nous nous faisons d'eux?

Dans une célèbre lettre écrite le 21 février 1772, Kant met en doute le pouvoir de nos représentations. Dans cette lettre, envoyée à Herz, Kant dit: «sur quel fondement repose le rapport de ce qu'on nomme en nous représentation à l'objet?»[3] Dans cette lettre, Kant questionne la légitimité qu'auraient nos représentations à présenter ou représenter fidèlement les objets. En termes sémiotiques, Kant questionne l'adéquation du signe. Or, quelles sont les raisons de Kant pour douter ainsi? La nature du doute kantien est d'ordre épistémologique. Du côté ontologique, Kant ne nie pas la transcendance des objets en soi. Kant doute que nous puissions connaître la véritable réalité des objets parce que tout ce qui se livre à nous dans l'expérience du monde est inéluctablement filtré par nos sens. Il faut distinguer entre l'objet en soi et l'objet tel qu'il nous apparaît au cours de l'expérience. Le premier est l'objet tel qu'il est réellement; le deuxième c'est juste une apparence.

Mais cela ne veut pas dire que toute connaissance nous reste inaccessible, car les connaissances des objets mathématiques constituent une exception. En effet, pour Kant, il y a des connaissances qui sont possibles: ce sont des connaissances *a*

3. Kant dans (Zweig, 1970); ma traduction.

priori. Et l'exemple paradigmatique est justement celui des mathématiques: «La mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même et sans le secours de l'expérience» (A 712/B 740)[4].

Or, qu'est-ce qu'une connaissance *a priori*? Kant dit:

> On nomme *a priori* des connaissances indépendantes de l'expérience et même de toutes les impressions des sens, et on les distingue des connaissances *empiriques*, qui ont leur source *a posteriori*, c'est-à-dire dans l'expérience. (B 2)

Il ne faut pas confondre *a priori* et *inné*. Pour Kant *l'a priori* est une catégorie logique; l'*inné* est une catégorie psychologique. Comme Kant le souligne dans le passage précédent, est *a priori*, tout ce qui ne trouve pas ses conditions de constitution dans l'expérience. Où peut alors l'*a priori* trouver ses propres conditions? Il le trouve dans les concepts de l'entendement et la logique implacable qui les gouverne.

Pour Kant, le théorème qui affirme que la somme des angles internes d'un triangle est 180º est vrai, ne trouve pas sa vérité dans l'expérience, mais dans le concept de triangle lui-même. Il en va de même du théorème de l'égalité des angles de la base d'un triangle isocèle. Dans l'introduction de la *Critique de la Raison Pure*, Kant dit:

> Le premier qui démontra le *triangle isocèle* (qu'il s'appelât *Thalès* ou de tout autre nom) eut une illumination; car il trouva qu'il ne devait pas s'attacher à ce qu'il voyait dans la figure, ou même au simple concept qu'il en avait, pour en apprendre en quelque sorte les propriétés, mais il devait produire cette figure par ce qu'il y pensait et présentait (par construction) *a priori* d'après les concepts eux-mêmes, et que, pour connaître sûrement une chose *a priori*, il ne devait attribuer à cette chose que ce qui résultait nécessairement de ce qu'il y avait mis lui-même, conformément à son concept. (Kant, BXI-BII)

Bien sûr, vu sous cet angle, Kant apparaît terriblement rationaliste. Il l'est, c'est certain. Mais, il s'oppose au rationalisme sur deux points importants: (1) les vérités mathématiques ne peuvent pas se restreindre à la non-contradiction des énoncés. Pour Kant cela ne peut faire que prouver leur *possibilité logique* et non pas leur *possibilité réelle*; (2) l'autre point concerne le rôle épistémologique du sensible. Dans la théorie de la connaissance de Kant, le sensible ne joue pas simplement un rôle accessoire. Pour Kant toute cognition comporte un élément conceptuel et un élément sensuel. L'élément sensuel est en relation avec ce que Kant appelle *l'intuition.* «L'intuition est une représentation dépendant immédiatement de la présence de l'objet» (*Prolégomènes*, § 8). Dans la terminologie moderne, l'intuition revient à ce que nous appelons usuellement une représentation particulière ou encore un symbole (Hintikka, 1980, pp. 61-62). Kant souligne avec force qu'«intuition et concepts constituent… les éléments de toute notre connaissance, de sorte que ni des concepts sans intuition qui leur corresponde de quelque manière, ni une intuition sans concepts ne peuvent donner une connaissance». (A 50/ B 74).

En fait, le rôle que Kant attribue au sensible est évident dans le passage concernant le triangle isocèle mentionné ci-dessus. D'après ce passage, Thalès forme une connaissance *a priori;* celle-ci ne résulte pas de la lecture de la figure, car cela voudrait dire que cette connaissance dépend de l'expérience. L'*a priori* c'est ce qui est né-

4. Suivant la coutume, la référence A 712 renvoie à la première édition de la *Critique de la Raison Pure*, publiée en 1781; B 740 renvoie à celle de la deuxième édition, publiée en 1787. Pour la traduction au français, je me base ici sur les *Œuvres philosophiques de Kant*, sous la direction de F. Aliqué, 1980, Gallimard.

cessairement employé dans le concept lui-même et qui *réapparaît* dans la figure concrète. Dans un passage de la Discipline de la Raison Pure, Kant dit:

> Ainsi je construis un triangle en présentant l'objet correspondant à ce concept soit par la simple imagination dans l'intuition pure, soit même, d'après celle-ci, sur le papier dans l'intuition empirique, mais dans les deux cas tout à fait *a priori*, sans en avoir tiré le modèle de quelque expérience que ce soit. La figure singulière tracée ici est empirique, et pourtant elle sert à exprimer le concept sans porter préjudice à son universalité, parce que dans cette intuition empirique, on ne regarde jamais que l'acte de la construction du concept… (A 713-4/ B 741-42)

Alors, de quelle façon Kant aborde-t-il, dans sa théorie de la connaissance, la relation qui existe entre le général et le particulier? Dans l'exemple précédent, Kant parle d'une correspondance entre concept et figure, donc entre le général et le particulier. Mais, quelle est exactement la nature de cette relation?

Kant répond que si la connaissance philosophique considère le particulier uniquement dans le général, la connaissance mathématique, par contre, considère «le général dans le particulier, même dans le singulier, mais *a priori* et au moyen de la raison». (A 714 /B 742).

La réponse de Kant se trouve déjà insinuée dans l'exemple du triangle; elle sera développée au long de l'*Analytique transcendantale*, tout particulièrement dans le dense chapitre consacré au schématisme, c'est-à-dire l'endroit même qui sera, plus tard, le point de départ de l'épistémologie génétique de Piaget. La relation entre le général et le particulier est assurée par le *schème*, c'est-à-dire (en continuant avec notre exemple) cette *règle de construction* du triangle qui, lors de son exécution, nous dévoile le concept sous un aspect particulier sans pour autant mettre en péril sa généralité.

C'est pour cela que le schème chez Kant est à la fois intellectuel et sensible. Il est intellectuel en ce sens qu'il est général; il est sensible en ce sens qu'il se déploie dans le temps et dans l'espace. Dans le chapitre du schématisme, Kant indique que

> nos concepts purs [dont ceux des mathématiques] n'ont pas pour fondement des images des objets, mais des schèmes. Il n'est d'image du triangle qui serait adéquate au concept d'un triangle en général. En effet, elle n'atteindrait pas l'universalité du concept, qui le rend valable pour tous les triangles, rectangles, à angles obliques, etc., mais elle serait toujours restreinte à une partie seulement de cette sphère. Le schème de triangle ne peut jamais exister ailleurs que dans la pensée (A 140-41/ B 179-80).

La réponse de Kant à la question posée précédemment est donc la suivante: c'est le schème qui assure la relation entre le général est le particulier. Le concept «descend» pour ainsi dire du monde intellectuel et, en se schématisant, il s'inscrit dans l'expérience humaine: il y prend une forme particulière qui, malgré ses particularités (le triangle construit dans le monde concret peut être petit, grand, rouge, etc.), revêt tout de même les traits de sa généralité.

Avec son concept de schème, qui a joué un rôle central dans l'élaboration des épistémologies du XX^{e} siècle[5], Kant réfute l'attaque que George Berkeley avait lancée contre l'existence des idées abstraites ou générales. Selon Berkeley, l'idée de triangle général est impossible, car quand on pense à un triangle, on pense toujours à un triangle

5. Bien sûr l'exemple le plus connu est celui de Piaget, qui abandonnera l'apriorisme kantian et fera du schème l'engin qui construit le concept. Un exemple peut-être moins connu est celui de Cassirer et sa théorie de la conceptualisation, thématisée selon les lignes de l'école kantienne de Marbourg (voir Radford, sous presse-1).

particulier. Un triangle général devrait être *simultanément* rectangle, scalène, équilatéral, isocèle, etc. Quoi de plus facile, dit Berkeley, à la fin de la section 13 de l'introduction à son *Traité concernant les principes de la connaissance humaine*, que de fouiller dans nos pensées et de voir si un tel triangle peut être véritablement pensé? L'erreur de Berkeley, dirait Kant consiste à confondre règle et image, ou schème et produit du schème.

La théorie du concept mathématique chez Kant repose donc sur les principes suivants:

1. Les concepts mathématiques sont des concepts *a priori*: ceux-ci ne trouvent pas leur condition de possibilité dans l'expérience humaine; ils la transcendent, mais, à la différence des concepts empiriques qui sont toujours filtrés par nos sens, les concepts mathématiques peuvent effectivement être connus.
2. Les concepts mathématiques sont universels.
3. Leur universalité est de l'ordre de ce qui est exprimable: elle s'exprime en tant que règle: «Toute connaissance exige un concept (et) ce concept est toujours, quant à sa forme, quelque chose de général et qui sert de règle» (A 106). Dans le cas des concepts purs, la règle est précisément celle qui nous est donnée par le schème.

On pourrait encore poser la question à Kant de l'adéquation entre le concept mathématique, qui est donc d'après lui, une entité universelle ou générale, et le particulier auquel aboutit le schème en se déployant dans le monde du sensible. On pourrait lui demander de nous préciser d'où la Raison tire ce pouvoir d'adéquation quand elle se penche sur les objets mathématiques et qui semble lui manquer quand elle se penche sur le monde empirique? La réponse n'est pas très longue. Si le mathématicien a le droit de voir le général dans le particulier, c'est, comme le note Daval (1951, p. 110), «parce qu'il est certain de la fidélité du signe. Le signe est la représentation adéquate du signifié».

Somme toute, le particulier et le général se lient, chez Kant, par la croyance en la fidélité du signe. Kant n'hésite pas à remettre en question l'adéquation du signe en général. Mais il est fait une exception quand il s'agit des mathématiques. On peut être assuré que, dans le cas des mathématiques, on peut contempler le général dans le particulier et que même si on raisonne sur des figures concrètes, «les propositions de la géométrie sont connues synthétiquement *a priori* et avec une certitude apodictique». (A46/B 64)

Résumons les propos précédents. Kant s'inscrit dans une longue tradition selon laquelle le concept général doit être en même temps universel. Général et universel veulent dire au-delà de l'expérience, donc au-delà de l'espace et du temps, ce qui amène Kant à épouser la théorie classique de vérité de la tradition *essentialiste*:

> Le concept de vérité chez Kant – et ceci est profondément lié à la pensée bourgeoise – est celui d'une vérité au-delà du temps (timeless truth)… Le concept de vérité au-delà du temps, (c'est-à-dire) le concept que seulement ce qui est au–delà du temps peut être réellement vrai… est une des plus profondes forces directrices de la philosophie kantienne (Adorno, 2001, p. 10).

On *doit* se méfier de la relation entre le général et le particulier, sauf en mathématiques où le particulier et le général se rencontrent dans ce lieu sécuritaire qui est le lieu du signe. Le général et le particulier sont thématisés par Kant selon les canons d'une tradition *essentialiste* qui voit le général et sa vérité comme ce qui reste, une fois tout ce qui change, tout ce qui est éphémère, lui est enlevé. Il s'agit d'une tradition *essentialiste* dont les origines remontent à l'ontologie de Platon, une ontologie qui véhicule les valeurs agonisantes d'une aristocratie athénienne qui, confrontée à la défaite de la guerre du Péloponnèse et à l'émergence concomitante d'un pouvoir populaire qu'elle craint, s'oppose à tout ce qui porte au changement.

3. La généralisation du point de vue anthropologique

Du point de vue anthropologique, l'échec de Kant ne se trouve pas dans le pouvoir qu'il confère au signe de représenter le général. Une des plus grandes contributions de Kant est en fait d'avoir insisté sur le rôle épistémologique du signe. Son échec se trouve dans la conception qu'il se fait de l'idéalité du concept mathématique: en postulant l'*a priori* du concept mathématique, Kant place celui-ci au-delà de l'expérience humaine. Dans l'approche sémiotique anthropologique (ASA) dont il est question ici, l'idéalité de l'objet conceptuel est directement liée au contexte historico-culturel. L'idéalité des objets mathématiques – c'est-à-dire, ce qui les rend généraux – est tout à fait tributaire de l'activité humaine. Comme l'indique le philosophe E. V. Ilyenkov,

> L'*idéalité* est comme un tampon imprimé sur la substance de la nature par l'activité sociale, une forme du fonctionnement de la chose physique dans le processus de cette activité. Ainsi, toutes les choses qui font partie du processus social acquièrent de nouvelles 'formes d'existence' qui ne sont pas incluses dans la nature physique de la chose et qui en diffèrent complètement. Cette nouvelle forme est leur forme idéale. (Ilyenkov, 1977a, p. 86)

En termes plus précis, dans l'ASA, le savoir mathématique est vu comme le produit d'une *praxis* réflexive cognitive médiatisée.

Le savoir en tant que praxis cognitive (*praxis cogitans*) souligne le fait que ce que nous connaissons et la manière dont nous arrivons à le connaître sont soustendus par des positions ontologiques et par des processus culturels de production du sens qui donnent forme à un certain mode de rationalité à l'intérieur duquel certains types de questions et de problèmes sont posés.

La nature *réflexive* du savoir doit être comprise au sens d'Ilyenkov, c'est-à-dire en tant que composante distinctive qui rend la cognition une réflexion intellectuelle du monde externe selon les formes de l'activité des individus (Ilyenkov 1977b, p. 252). La nature médiatisée du savoir fait référence au rôle que jouent les outils et les signes en tant que moyens d'objectivation du savoir et en tant qu'instruments qui permettent de mener à terme la *praxis* cognitive.

Comme c'était le cas chez Kant, généraliser revient ici à «voir» le général dans le particulier, sauf que, dans l'ASA, le général est conçu non pas au sens d'une entité transcendantale, mais d'une entité générale qui dérive de la réflexion que font les individus du monde qui les entoure. De plus, «voir» ce général ne relève pas de la démarche d'un sensualisme qui viendrait remplir de contenu les récipients du concept. Il s'agit avant tout d'un général (un *ens* ou être) qui se construit en même temps que les particuliers qu'il subsume selon les formes de la rationalité culturelle[6].

Il est temps maintenant de nous tourner du côté de la salle de classe.

6. Lors de mes recherches épistémologiques précédentes, j'ai pu fournir plusieurs exemples historiques à ce sujet. Dans (Radford, 1997b) on trouvera une analyse de l'émergence de la deuxième inconnue en algèbre au XIV^{e} siècle. La deuxième inconnue ap-

4. La généralisation en salle de classe

D'après l'ASA, une distinction importante doit être faite entre apprentissage et production du savoir[7]. Alors que la production du nouveau savoir résulte d'activités communales, réflexives, médiatisées débouchant sur la création de concepts culturels (que ce soit des objets mathématiques, scientifiques, artistiques, esthétiques ou autres), l'apprentissage scolaire est le processus de transformation active des objets culturels en objets de conscience.

La transformation d'objet conceptuel culturel en objet de conscience est thématisée dans l'ASA en tant que processus d'*objectivation*. L'objectivation de l'objet signifie une réflexion sur l'objet selon les formes de l'activité mathématique: l'objet apparaît comme *ré-flexion* dans la conscience individuelle de ce qui est *déjà* inscrit dans la culture.

Or, comment l'objet se réfléchit-il? C'est ici qu'on doit faire intervenir le concept de *moyens sémiotiques d'objectivation* du savoir.

4.1. Moyens sémiotiques d'objectivation

Comme j'ai dit dans l'introduction, la théorisation précédente a été le résultat d'un effort pour comprendre les difficultés auxquelles se trouvaient confronté les élèves devant des tâches de généralisation lors de l'introduction à l'algèbre.

Une des premières questions que nous avons posée aux élèves était la suivante: nous avons montré aux élèves une séquence de type très classique (voir ci-dessous) et, après leur avoir fait calculer le nombre de cercles dans des figures particulières telles que la figure 25 et la figure 100, nous leur avons demandé de trouver le nombre de cercles dans la figure n.

Les étudiants s'étonnaient de la question: ils répondaient souvent par d'autres questions comme: «Quoi? C'est quoi la figure n?», «Mais voyons! Il n'y a pas de figure n!» «n égale quoi?».

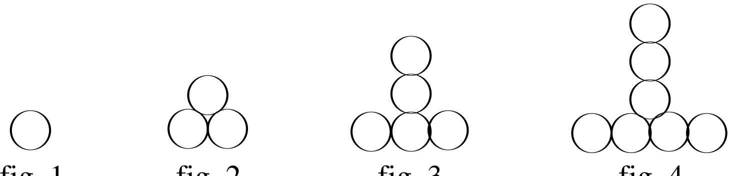


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

paraît à l'intérieur de l'espace qu'ouvre le mouvement économique, culturel et intellectuel du haut Moyen-Âge, et qui amène à une rupture au niveau de la représentation jusqu'alors purement iconique de la tradition byzantine.

7. Cette distinction a été soulignée par d'autres approches anthropologiques, dont celle de Chevallard (1985) (voir aussi Bosch et Chevallard, 1999), qui parle en particulier de *transposition* du savoir; mais il arrive souvent qu'on l'oublie et qu'on finisse par considérer que les mécanismes d'appropriation ou d'acquisition du savoir sont les mêmes que ceux de sa construction.

Certes, la question était posée d'emblée dans une terminologie qui avait recours à des symboles et des concepts algébriques que les étudiants ne connaissaient pas encore. Mais des changements dans la formulation n'ont pas beaucoup aidé. Quand nous leur avons demandé de trouver le nombre de cercles dans une figure *quelconque*, ils nous demandaient ce que nous voulions dire par là: «figure quelconque… C'est quoi quelconque?» «C'est quoi ça?». Un élève a même interprété quelconque comme voulant dire n'importe quel genre de figure. Il a dit: «Peut-être c'est comme un carré!».

Le problème est qu'il n'est pas possible de montrer concrètement la figure générale. Il faut la voir autrement. Les élèves étaient placés devant une situation où le professeur voyait l'objet culturel en question; mais eux, ils ne pouvaient pas encore le voir. Pour pouvoir le voir, il fallait que les élèves s'engagent dans un processus d'*objectivation*.

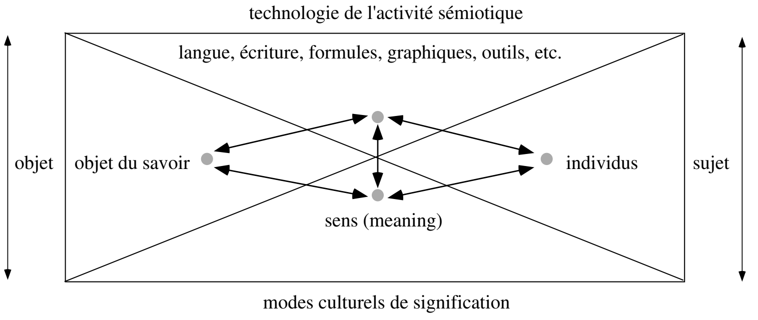
Le terme objectivation est composé de deux termes: *Object+tivation*. Le premier terme *object* vient de *obietare*, qui veut dire «placer quelque chose devant quelqu'un». *Facere* vient de «faire», de sorte que, dans son sens étymologique, objectivation veut dire «faire placer quelque chose devant quelqu'un pour qu'il le voie ou le perçoive». Dans ce contexte, objectivation est un processus dont le but est de montrer quelque chose (un objet) à quelqu'un. Or, quels sont les moyens pour montrer l'objet? Ces moyens sont ce que j'appelle les *moyens sémiotiques d'objectivation*. Ce sont des objets, des artefacts, des termes linguistiques et des signes en général qu'on utilise afin de rendre apparente une intention et de mener à terme une action.

Il me faut insister ici sur le sens phénoménologique dans lequel je prends les termes «voir», «montrer», «faire apparaître», etc. Ces termes ne revoient pas à une attitude passive de celui qui voit. Comme Davydov dit, «les objets et la réalité sont donnés à l'homme social, non pas à travers la contemplation passive, mais uniquement sous la forme de son activité pratique sensori-objectuelle»[8]. Tout acte de perception est un acte actif extrêmement complexe. Il repose sur des actions, sur une interprétation-réinterprétation continuelle et une donation de sens de ce qui est perçu par celui qui perçoit selon les catégories culturelles dont il dispose pour saisir ce qu'il y a à percevoir. Dans le cas des objets conceptuels, le perçu est en fait non perceptible de sorte qu'il n'est accessible qu'indirectement, à travers les moyens sémiotiques d'objectivation. J'aurai l'occasion de revenir sur ce point ci-dessous.

D'après ce qui a été dit, la généralisation mathématique apparaît reliée à l'activité sémiotique que déploie l'élève en vue de «prendre conscience» d'une «*objectité*» conceptuelle (Husserl) qui échappait à son attention jusqu'à alors. Or, les moyens sémiotiques d'objectivation offrent des possibilités différentes pour effectuer une tâche, désigner des objets et exprimer des intentions. C'est pour cela que l'activité sémiotique se produit dans le lieu de rencontre d'une subjectivité qui cherche à s'exprimer et d'un système social de significations déjà en place (Merleau-Ponty). L'activité sémiotique se trouve ainsi à l'intersection de ce que chez Aristote apparaît comme *techn_*, c'est-à-dire comme travail réfléchi sur des objets et signes concrets, et une *po_sis*, entendue comme l'avènement du sens.

La figure suivante rend compte de l'objectivation du savoir telle qu'elle est conçue dans l'ASA.

8. «Objects and reality are given to social man, not through passive contemplation, but only in the forms of his practical, *sensory-object* activity». (Davydov, 1990, p. 244).



Cette figure met en évidence le fait que l'objet du savoir n'est pas filtré seulement par nos sens, comme c'est le cas chez Kant, mais surtout par des modes culturelles de signification[9]. La figure met également en évidence que l'objet du savoir est filtré par la technologie de l'activité sémiotique. L'absence de flèche directe reliant les individus et l'objet du savoir exprime clairement l'idée vygotskienne selon laquelle le savoir est culturellement médiatisé.

4.2. Généralisations factuelles

L'extrait suivant provient d'une des premières observations faites pendant notre programme longitudinal de recherche. Dans l'extrait, nous voyons un des groupes de 3 élèves que nous avons suivi pendant cinq ans. Les élèves devaient trouver le nombre de cure-dents qu'il y a dans la figure 25 dans une suite très classique – celle de triangles faits à l'aide de cure-dents.

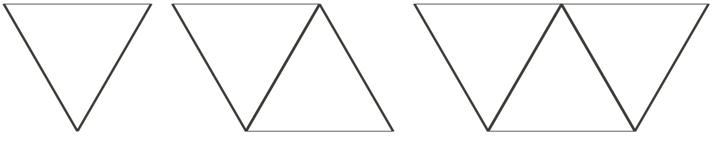


fig. 1 fig. 2 fig. 3

1. Judith: La prochaine figure en a deux de plus que… regarde! [La figure] 6 est 13, 13 plus 2. Il faut que tu continues là. Minute (*elle prend une calculatrice*) OK. OK. C'est plus…
2. Anik: Ben, tu peux pas toujours faire plus 2, plus 2, plus 2,…
3. Judith: Ben oui. Ça, c'est figure 7, plus 2, égale figure 8.
4. Josh: Ça va être trop long! […] C'est toujours le prochain. Regarde! (*Avec son crayon, il pointe les figures en parlant; voir photo 1*) 1 plus 2, 2 plus 3, […].

9. Deux exemples de modes culturels de signification sont: l'opposition symétrique yin/yang dans la Chine antique (qui rend possible la conceptualisation de nombres négatifs) et l'opposition non symétrique de l'être et le non-être de la pensée grecque classique (qui exclut les nombres négatifs du monde de l'existence). Voir Radford 1997a, 2003a.

5. Anik: So, 25 plus 26…
6. Josh: Attends une minute. Oui, 3 plus 4, c'est 7; 4 plus 5… donc, c'est 27 plus 26?
7. Anik: Ben, parce que tu fais toujours… comme… regarde (elle indique la figure 3 directement avec son index; voir photo 2) [figure] 3 plus […] C'est 25 plus 26.


Photo 1 (à gauche). Avec son crayon, Josh pointe les figures (ligne 4 du dialogue).
Photo 2 (à droite) Anik indique la figure 3 avec son index (ligne 7 du dialogue).

Les élèves ont trouvé la réponse sans compter le nombre de cure-dents de chacune des figures: ils ont effectué une généralisation. Or de quel type de généralisation s'agit-il? À la ligne 1, Judith dégage une relation de récurrence, que nous écririons, en langage symbolique, de la façon suivante: $u_{n+1} = u_n + 2$. Josh, continuant une idée d'Anik à la ligne 2, met en évidence le caractère peu pratique de la relation et propose une nouvelle stratégie qui est tout de suite comprise par Anik. Mais, à la ligne 6, Josh ne sait pas si c'est 27 + 26 ou 25+26. La question est réglée par Anik à la ligne 7. À ce moment-ci, les élèves ont dégagé un *schème* (au sens kantien du terme) qui leur permet maintenant de trouver le nombre de cure-dents dans n'importe quelle figure spécifique. Ils ont réussi à objectiver ce que nous appelons une *généralisation factuelle*, c'est-à-dire, une généralisation d'actions sous la forme d'un schème opérationnel qui reste confiné au niveau numérique.

À vrai dire, il n'y a pas de grand mystère derrière les généralisations factuelles. On les retrouve abondamment chez les élèves plus jeunes. Ce qui est intéressant, c'est de voir comment ces généralisations sont objectivées, c'est-à-dire de déterminer les moyens sémiotiques d'objectivation qu'utilisent les élèves pour rendre ces généralisations des «objets de conscience».

Le terme «prochain»:

En retournant à l'extrait précédent, on voit que le terme linguistique «prochain» joue un rôle central. Ce terme fait partie de ce qu'on appelle en sémiotique les *déictiques spatiaux*. Il suggère une façon d'appréhender les figures et ouvre une possibilité pour faire émerger une structure mathématique derrière la suite. À travers de termes tels que «prochain», «ici», «là», «celui-ci», «celui-là», la langue remplit une fonction centrale dans les processus d'objectivation, une fonction que nous avons appelé la *fonction déictique* (Radford, 2000).

L'adverbe «toujours»:

Un autre terme linguistique important est l'adverbe «toujours». Il permet de véhiculer le sens de généralité et d'exprimer cette idée centrale à la généralisation de quelque chose qui continue de façon indéfinie. Il fait partie d'une autre fonction centrale de la langue qui rend possible de décrire des procédures et des actions qui peuvent être conduites potentiellement, d'une façon imaginée. Nous avons appelé cette fonction la *fonction générative de la langue* (Radford, 2000)[10].

Les gestes:

Un autre moyen sémiotique d'objectivation est constitué par les gestes que font les élèves. Les photos ci-dessus montrent comment les gestes permettent d'indiquer, avec un crayon ou avec la main, certains objets du discours afin d'attirer l'attention et de guider la perception dans l'acte donateur du sens.

Bien sûr, les moyens sémiotiques d'objectivation que nous venons de mettre en évidence n'ont pas de raison d'être dans les approches classiques cognitivistes, puisque, dans ces approches, l'activité cognitive est supposée avoir lieu *dans* la tête. On se rappellera toutefois que, précisément, à l'origine de l'ASA, se trouve cette volonté expresse d'aller au-delà de cette vue cartésienne de la cognition qui emprisonne l'activité cognitive dans la boîte crânienne. Si, donc, on élargit le spectre de l'activité cognitive et on analyse attentivement toutes les ressources mobilisées par les élèves pour rendre leurs démarches de généralisations apparentes, on s'aperçoit que les gestes et le langage s'articulent autour d'une activité perceptive d'une façon très complexe. Mais il y a encore plus. Outre le langage et les gestes, il y a aussi le rythme et le mouvement.

Rythme et mouvement:

Dans un autre groupe, une des élèves a dit:

OK, en tout cas, la figure 1 est plus 2. La figure 2 est plus 3. La figure 3 est plus 4. La figure 4 est plus 5 (*et à mesure que l'élève prononçait les mots, elle indiquait les figures*).

Dans un autre groupe, un élève a dit:

On va aller par 2 … 3, 5, 7, 9, 11 (*et à mesure qu'elle comptait, elle indiquait les figures*).

Dans ces deux épisodes, il n'y a pas de déictique spatial comme le «prochain»; il n'y a pas d'adverbe «toujours». Ici les élèves ont recours à des versions non linguistiques de ces termes pour exprimer le sens de généralité. En fait, le schème d'abstraction n'atteint pas une couche verbale. Son matériau sémiotique est fait de rythme et mouvement. Même si on trouve déjà cette combinaison de rythme et mouvement à la ligne 4 dans l'intervention de Josh, dans les deux derniers exemples, le rythme et le

10. Remarquons que d'autres systèmes sémiotiques comme ceux de la peinture possèdent, jusqu'à un certain point, de moyens pour remplir les fonctions déictique et générative. Une tâche, ou un grand signe peut jouer le rôle du terme «ici» et indiquer quelque chose sur l'espace sémiotique de la peinture; un effet de perspective peut aussi communiquer l'idée d'une action qui se continue. Mais ces fonctions centrales, la déictique et la générative, restent beaucoup plus topiques ici que dans la langue. Il y a des systèmes sémiotiques qui n'ont pas de déictiques, comme le langage algébrique.

mouvement créent une cadence qui dispense les élèves d'avoir recours à d'autres moyens d'objectivation.

4.3. Généralisations contextuelles

Pour aider les élèves à objectiver plus profondément le schème de généralisation, nous leur avons demandé d'écrire un texte dont le but était d'expliquer, à un élève d'une autre classe, comme faire pour calculer le nombre de cure-dents dans n'importe quelle figure de la suite.

Voici un court passage des propos tenus par un des élèves:

> Anik: On fait comme… ça serait comme… regarde… ici, ici quand… oops. OK. Regarde, ben. Ici la figure… OK, ça ici c'est le numéro de la figure, right? […] On peut dire comme… c'est le numéro de la figure, right? Comme… mettons c'est 1 là (elle fait référence à la figure 1)… Si… si OK, tu additionnes… comment tu dis ça? En ordre de… Tu additionnes par lui-même… Tu fais 2 +2, puis après ça, plus 1. Tu fais toujours ça, right? Tu ferais 3 plus 3, plus 1; 4 plus 4, plus 1; 5 plus 5, plus 1. Tu sais ce que je veux dire?

Ce court passage met en évidence la difficulté qu'ont les élèves à atteindre un niveau plus élevé de généralité. Alors que l'intention est claire, elle n'arrive pourtant pas à être exprimée de façon satisfaisante sans avoir recours à des exemples concrets, propres à la couche conceptuelle où se situe la généralisation factuelle. L'écriture du message fait appel à des moyens d'objectivation placés dans un compartiment de la technologie de l'activité sémiotique qui exclut l'utilisation d'exemples concrets et qui exige l'abandon du rythme, du mouvement et des gestes. Puisque le message est adressé à un élève absent, on ne peut pas compter sur son activité perceptive. Quelle facilité ce serait de lui expliquer le schème de généralisation, s'il était là devant le petit groupe d'Anik!

Les élèves n'ont pas réussi à objectiver le schème cherché. Ils sont alors revenus sur l'idée initiale à la base de la généralisation factuelle vue à la section 4.2.

1. Anik: Tu additionnes la première figure …
2. Josh: (*Il interrompt*) (et) la deuxième figure.
3. Anik: […] C'est pas la deuxième figure … C'est pas la prochaine figure?
4. Josh: Oui, la prochaine.
5. Anik: (*En récapitulant*) Tu additionnes la figure et la prochaine figure.

Sans utiliser de lettres ou d'exemples concrets, les élèves arrivent à objectiver un schème opérationnel dont les 'arguments' ou 'variables' ne sont plus de nombres (comme 10, 25, 100, etc.). Ce sont des objets généraux. Ils sont désignés par des termes génériques tels que «la figure», «la prochaine figure». Ces termes constituent les moyens sémiotiques d'objectivation. À l'aide de ces moyens, l'objet général, qui reste toujours inaccessible directement, commence à prendre forme: il commence à devenir un «objet de conscience» pour les élèves. Bien que généraux, ces objets restent toutefois *contextuels*. Ils sont contextuels en ce sens que le mode de désignation dépend encore de propriétés spatiales qui restent très prégnantes, ici celle de *proximité*. Elles supposent ce que Bühler (1979) a appelé un *origo*, c'est-à-dire un point spatio-temporel (un centre ou point d'observation) qui permet qu'on puisse parler du «prochain», du «haut», du «bas», «avant», «après», «droite», «gauche», etc.

Dans (Radford, 2003b), ces généralisations ont été appelées des *généralisations contextuelles*. Plus précisément, une généralisation contextuelle est une généralisation qui prend la forme d'un schème dont les arguments sont des objets généraux, mais qui portent en eux les caractéristiques conceptuelles de la situation spatio-temporelle dont ils sont issus.

L'étude de ces généralisations non symboliques jette une lumière sur la *nature* des difficultés qu'ont les élèves débutants à trouver des formules algébriques dans un contexte de généralisation. En effet, la généralisation algébrique exige une rupture très profonde avec les modes de signification des objets des généralisations factuelles et contextuelles. Le langage algébrique ne possède pas d'adverbes (par exemple, «toujours») et il n'est pas assez riche pour traduire des gestes et des termes déictiques importants pour la démarche d'objectivation (des termes tels que «ça», «le prochain», «ici», etc.). Il ne peut pas inclure le rythme et le mouvement. Le langage algébrique impose une sobriété à celui qui pense et qui s'exprime, une sobriété dans les modes de signification qui a été impensable avant la Renaissance. Il impose ce que nous avons appelé ailleurs (Radford 2002) une *contraction sémiotique*. Il suppose aussi la perte de l'*origo*. Ainsi, même si certains élèves ont réussi à exprimer le nombre de cure-dents dans la figure n par la formule «n +(n+1)», où «n» désigne le nombre de la figure n est «n+1» celui de la figure suivante (ou «la prochaine figure»), ils n'étaient pas prêts à supprimer les parenthèses et à ajouter les lettres, car cela entraînait la destruction du sens de la désignation. À quoi pouvait bien se référer une expression comme «2n+1»? (voir Radford 2000, 2002, 2003b).

5. Conclusion

Dans l'introduction, nous disions qu'une des motivations à la base de l'approche sémiotique anthropologique (ASA), était d'aller au-delà de la conception d'activité cognitive offerte par la tradition classique cartésienne. En nous inspirant des travaux de l'école socio-historique de Vygotski, de la phénoménologie de Husserl et de l'épistémologie kantienne, nous avons été conduits à poser le problème de l'apprentissage comme un problème de transformation des objets conceptuels culturels en objets de conscience. Apprendre, c'est prendre conscience d'un objet général selon les modes de rationalité de la culture. Les questions posées aux élèves, lors de l'activité de généralisation vue ici, nous permettent d'illustrer ces propos. Ces questions ne sont pas «naturelles». Elles ne se résolvent pas par l'entremise des *concepts quotidiens* (au sens de Vygotski, 1985). Ces questions font partie d'une tradition mathématique sophistiquée, formée au cours des siècles. La prise de conscience chez l'élève a lieu dans le cadre de cette tradition et de sa rationalité propre.

L'ASA théorise le problème de la transformation d'objets culturels en objets de conscience en relation à l'activité des individus (Leontiev) et aux moyens sémiotiques d'objectivation. Elle retient la valeur conceptuelle du concept de schème kantien, mais elle souligne la nature sémiotique de celui-ci. Le schème n'est pas seulement l'emboîtement logique d'action qu'effectue le sujet (Piaget). C'est aussi, et surtout, l'action médiatisée (Vygotski) par la technologie de l'activité sémiotique qui offre des possibilités et des limites pour exprimer ce qui est exprimable (l'*intentio* dans la terminologie de Husserl)[11]. Si, comme suggérait Kant, le schème s'exprime en tant que «règle», il ne le fait ni avec les seuls moyens de la théorie prédicative aristotélicienne ni avec les seules ressources de la tradition écrite. Le matériau sémiotique du schème est plus riche et varié: il est fait de mouvement, de rythme, de gestes, de signes écrits, de mots. Le schème est porteur d'une intention subjective qui se matérialise dans les moyens sémiotiques d'objectivation, porteurs silencieux d'une activité cognitive de générations passées et de traditions intellectuelles qui orientent nos façons de voir le monde. Cet objet général que le schème insinue, n'est pas un objet transcendant mais le produit de la réflexion des individus du monde qu'ils questionnent à l'intérieur d'une *praxis cogitans* historiquement constituée.

Du point de vue de l'enseignement, voir la généralisation mathématique comme processus sémiotique, c'est, entre autres, d'être attentif aux moyens sémiotiques d'objectivation, à leurs différentes couches conceptuelles et aux problèmes que cela pose aux élèves de passer d'une couche à l'autre.

11. Radford, sous presse-2.

Adorno, T. W.
Kant's Critique of Pure Reason. Stanford CA: Stanford University Press, 2001.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999).
La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 19 (1), pp. 77-124.. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bühler. K.
Teoría del lenguaje. Traduit par Julián Marías. Madrid: Alianza Editorial, 1979.

Chevallard, Y.
La transposition didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985, 2ème édition, 1991.

Daval, R.
La métaphysique de Kant. Paris: Presses Universitaires de France, 1957.

Davydov, V. V.
Types of Generalization in Instruction: Logical and psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

Hintikka, J.
La philosophie des mathématiques chez Kant. Paris: Presses Universitaires de France, 1980.

Ilyenkov, E.
The Concept of the Ideal. Dans: *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism*. Moscow: Progress Publishers, 1977a.

Ilyenkov, E. V.
Dialectical Logic. Moscow: Progress Publishers, 1977b.

Høyrup, J.
Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought. *Altorientalische Forschungen*, 17, pp. 27-69, 262-354, 1990.

Kozulin, A.
Vygotsky's psychology. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1990.

Lizcano, E.
Imaginario colectivo y creación matemática. Barcelona: Editorial Gedisa, 1993.

Mason, J.
Expressing generality and roots of algebra. Dans: N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dirs.) *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht/Boston/London: Kluwer, 1996.

Radford, L.
On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 17 (1), pp. 26-33, 1997a.

Radford, L.
L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre. *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), juillet, No. 28, pp. 81-96. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 1997b.

Radford, L.
On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, Vol. 35 (1), pp. 277-302. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 1998.

Radford, L.:
El aprendizaje del uso de signos: una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*, 11(3), pp. 25-53, 1999.

Radford, L.:
Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics,* 42 (3), pp. 237-268, 2000.

Radford, L.
The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), pp. 14-23. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 2002.

Radford, L.
On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Dans: M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V. Cifarelli (dirs.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, pp. 49-79. Ottawa: Legas Publishing. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 2003a.

Radford, L.
Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*. 5(1), (pp. 37-70). (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), 2003b.

Radford, L.
Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La Matematica e la sua didattica,* no. 1 pp. 4-23, 2004.

Radford, L.
Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (sous presse-1).

Radford, L.
Kant, Piaget, and the Calculator. Rethinking the Schema from a Semiotic-Cultural Perspective. Dans: Michael Hoffmann, Johannes Lenhard, Falk Seeger (dirs.), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*. Festschrift for Michael Otte. Dordrecht: Kluwer. (http://www.laurentian.ca/educ/lradford/), (sous presse-2).

Vygotski, L. S.
Pensée et langage. Paris: Éditions sociales, 1985.

Wertsch, J. V.
Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action. Cambridge, Ma.: Harvard University Press, 1991.

Zinchenko, V. P.
Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. Dans: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (dir.), Cambridge: University Press, pp. 94-118, 1985.

Zweig, A.
Kant Philosophical correspondence 1759-99. Chicago: The University of Chicago Press, 1967.

2. Una riflessione dell'etnomatematica: perché insegnare matematica?

Ubiratan D'Ambrosio

In this work we deal with the cognitive, the epistemological, the historical and the political dimension of teaching mathematics in the multicultural milieu of our schools. This is the suggestion of the Ethnomathematics Programme. The proposal reveals several difficulties, especially as regards teacher training. The traditional views of mathematics, both as regards the intellectual reflection, and as utilitarian practice, must be updated, particularly due to the predominant presence of technology in our modern society.

Introduzione

Credo che molti saranno sorpresi della scelta che ho fatto per il titolo di questa conferenza. Nel XVI Convegno nazionale sulla didattica della matematica e sulle sue applicazioni, a Castel San Pietro Terme, Bologna, Italia, ho tenuto una conferenza con lo stesso titolo (D'Ambrosio, 2002). Vi ricorderete che, in quel lavoro, ho tracciato l'evoluzione della mia concezione del Programma Etnomatematica durante 25 anni. Ho finito con una domanda:

La sfida: come incorporare l'etica nella pratica matematica, tanto nell'insegnamento quanto nella ricerca?

L'interrogativo è fondamentale e urgente. Le mie idee sulla etnomatematica risalgono agli anni Settanta. Da quel momento, ci sono stati dei cambiamenti profondi nella società. Qualche paese è sparito, altri sono sorti. Una mobilità intensa ha cambiato lo scenario demografico delle popolazioni di tutto il mondo. La tecnologia ha subito grandi trasformazioni. I nuovi media di comunicazione e d'informazione sono ora accessibili a tutti, anche ai bambini. La tecnoscienza ha cambiato il concetto della salute, della riproduzione e delle relazioni emozionali tra gli esseri umani. Le relazioni tra le generazioni e tra i gruppi culturali sono più tese. Violenza, terrorismo e lotta al terrorismo sono fattori essenziali che intervengono nelle decisioni dei governi.

È impossibile essere insensibili a questo panorama nelle discussioni sull'educazione. In particolare, sull'educazione matematica. La violenza, il terrorismo e la lotta al terrorismo sono al centro delle attività quotidiane. Sarebbe irresponsabile ignorare queste questioni nell'insegnamento matematico. È essenziale per noi, educatori matematici, considerare gli effetti di questi cambiamenti nella nostra pratica. Come Giano, le questioni hanno due aspetti: quella di educatore e quella di matematico. Il concetto tradizionale di curricolo considera tre componenti: obiettivi, contenuti e metodi, considerati insieme. In tal senso, questa concezione del curricolo è olistica.

Le tre componenti del curricolo non possono essere trattate indipendentemente. S'influenzano reciprocamente. Il Programma Etnomatematica ha, intrinsecamente, la flessibilità necessaria per trattare questa interdipendenza.

La natura della matematica

Comincio con una riflessione sull'origine delle idee matematiche: come sorge la matematica?

La matematica, come la conoscenza, da un punto di vista generale, è risposta agli impulsi di sopravvivenza e di trascendenza che sintetizzano la questione esistenziale della specie umana. La specie crea teorie e pratiche che risolvono la questione esistenziale. Tali teorie e pratiche sono le basi di elaborazione di conoscenze e decisioni di comportamento, prodotte partendo da rappresentazioni della realtà. Le rappresentazioni rispondono alla percezione di spazio e tempo. La virtualità delle rappresentazioni, che si manifesta nell'elaborazione di modelli, distingue la specie umana da qualunque altra specie animale.

In ogni specie vivente, la questione della sopravvivenza è risolta con comportamenti di risposta immediata, qui e adesso, elaborati a partire dalla realtà e ricorrendo ad esperienze anteriori [conoscenza] dell'individuo e della specie [incorporata nel codice genetico]. Il comportamento ha radici nelle conoscenze ed allo stesso tempo produce nuova conoscenza. Questa simbiosi di comportamento e conoscenza è il cosiddetto istinto che affronta le questioni della sopravvivenza dell'individuo e della specie.

Nella specie umana, la questione della sopravvivenza è accompagnata da quella di trascendenza: il «qui e adesso» è ampliato a «dove e quando». La specie umana trascende spazio e tempo oltre l'immediato ed il sensibile. Il presente è prolungato al passato ed al futuro ed il sensibile si amplia al remoto. L'essere umano agisce in funzione della sua capacità sensoriale che risponde al materiale [manufatti] e della sua immaginazione, molte volte chiamata creatività, che risponde all'astratto [mentefatti].

La realtà materiale è la cumulazione di fatti e fenomeni accumulati dal principio. Che cos'è il principio, in spazio e tempo? Questa è la questione più importante di tutti i sistemi religiosi, filosofici e scientifici.

La realtà percepita da ogni individuo della specie umana è la realtà naturale, accresciuta della totalità dei manufatti e mentefatti [esperimenti e pensieri], da lui accumulati, oppure dalla specie [cultura]. La realtà, attraverso meccanismi genetici, sensoriali e della memoria [conoscenza] condiziona ogni individuo. Ogni individuo processa l'informazione, il che definisce la sua azione, portando ad un comportamento e alla generazione di altra conoscenza. La cumulazione di conoscenze condivise dagli individui di un gruppo ha come conseguenza di rendere compatibili i comportamenti dei singoli individui. Le conoscenze condivise ed i comportamenti compatibili cumulati costituiscono la cultura del gruppo.

Il Programma Etnomatematica

Etnomatematica è un programma di ricerca in storia e filosofia della matematica, con evidenti implicazioni pedagogiche.

Non sarebbe necessario tentare una definizione o anche solo una concettualizzazione di etnomatematica in questo momento. Ma a titolo di motivazione, per la nostra posizione teorica, utilizziamo come punto di partenza la sua etimologia: *etno* è oggi accettato come qualcosa di molto ampio, referente al contesto culturale, e dunque include considerazioni su argomenti come linguaggio, gergo, codici di comportamento, miti e simboli; *matema* è una radice difficile, che va nella direzione di spiegare, conoscere, capire; e *tica* viene senza dubbio da *techne*, che è la stessa radice di arte e di tecnica. Così, potremmo dire che etnomatematica è l’arte o la tecnica di spiegare, di conoscere, di capire nei diversi contesti culturali. In questa concezione ci avviciniamo ad una teoria della conoscenza o, come è modernamente chiamata, una teoria della cognizione.

Siamo così portati a identificare tecniche, competenze e pratiche utilizzate da distinti gruppi culturali nel loro tentativo di spiegare, di conoscere, di capire il mondo che li circonda, la realtà per loro sensibile, e di modificare tale realtà a loro beneficio e a beneficio del loro gruppo. Naturalmente, facendo ciò ci poniamo nel contesto etnografico. Il passo successivo è la ricerca di una fondazione teorica, di un sostrato concettuale sul quale queste tecniche, competenze e pratiche si appoggiano. Qui ci aiuta molto l’analisi storica ed è per questo che etnomatematica e storia delle scienze appaiono come aree molto prossime in questo programma. Tra queste tecniche, competenze e pratiche si trovano quelle che utilizzano processi di conteggio, di misura, di classificazione, di ordinamento e di inferenza, e che furono identificate e riunite, a partire da Pitagora, nella disciplina scientifica che oggi chiamiamo matematica. Innegabilmente, questo tentativo di classificare stili di approccio alla realtà, alla natura, è tipicamente greco e così la matematica, come la concepiamo nei nostri sistemi scolastici, deriva dal pensiero greco. Altri sistemi culturali sviluppano tecniche, competenze e pratiche diverse per destreggiarsi con la realtà, per controllare i fenomeni naturali, e persino per fare teoria di queste stesse tecniche, competenze e pratiche, benché nei mezzi per fare ciò si sia incontrata una certa universalità, via via meno gerarchizzata, nei processi di conteggio, misura, ordinamento, classificazione e inferenza. Come dire che gruppi culturalmente differenziati, come gruppi di adolescenti, una comunità di indios o di giovani operai di una città industrializzata, spiegano il fenomeno della pioggia in maniera assolutamente diversa, persino quantificandolo in altro modo. Similmente, proponendo a bambini di comunità distinte nella fascia dei dieci anni la costruzione di un aquilone, cosa che coinvolge misure, conteggi e altre tecniche, l’approccio sarà completamente diverso. Allo stesso modo, proponendo un problema come il controllo di un sistema elettrico di grande potenza ad ingegneri ed a matematici, l’approccio sarà anche in questo caso differente. Queste differenze vanno al di là della mera utilizzazione di tecniche, competenze e pratiche diverse, ma riflettono posizioni concettuali e punti di vista cognitivi distinti.

Ammettiamo essenzialmente che ogni attività umana derivi dalla motivazione proposta dalla realtà nella quale è inserito l’individuo attraverso le situazioni o i problemi che tale realtà gli propone, direttamente, attraverso la sua propria percezione ed il suo apparato sensoriale, o, indirettamente, cioè opportunamente mediati da proposte di altri, siano essi professori o compagni. Vogliamo capire questo processo che va dalla *realtà* all'*azione*. Ammettiamo anche che l'approccio a queste situazioni o problemi sia culturale, e tentiamo di analizzare quali sono le differenze cognitive che risultano da queste differenze culturali. Questo programma, che si basa sull'ammissione dei due fatti di cui sopra, rivela molte somiglianze con ciò che comincia a essere chiamato, in ricerche recenti sull'organizzazione del cervello e sull'intelligenza artificiale, metacognizione. Possiamo dire che sono programmi affini. Troviamo nel programma Etnomatematica i vantaggi del punto di vista culturale, del quale l'analisi storica appare come uno strumento importante, e anche del punto di vista pedagogico, perché abbiamo a che fare direttamente col processo di apprendimento.

Sintetizzando, potremmo dire che l'etnomatematica è un programma volto a spiegare i processi di generazione, organizzazione e trasmissione in differenti sistemi culturali e le forze interattive che agiscono su di noi in questi tre processi. Dunque, la visione è fondamentalmente olistica.

Nella metodologia adottata, benché ci basiamo su molte informazioni di natura etnografica, è fondamentale l'analisi storica. Nella storia dominante delle scienze, che ovviamente esclude l'etnomatematica e i riferimenti alle matematiche praticate da altri gruppi culturali, risentono di un punto di vista dichiaratamente eurocentrico, paternalista, che inquadra le conoscenze degli altri contesti culturali, nel migliore dei casi, come «conoscenza popolare» o anche «folklore». Nel fare storia di una certa branca specifica, come è il caso della storia della matematica, è molto importante che si intenda il legame di tali fatti tra loro, od il loro concatenarsi logico alla disciplina specifica. Che cosa viene ad essere la conoscenza disciplinare? È una sistemazione, organizzata secondo criteri interni alla stessa disciplina, di un agglomerato di modi di spiegare (sapere), di modificare (fare), di riflettere, di prevedere e dei concetti e norme associati a questi modi. Ora, la storia della disciplina si fa dunque rispettando questa sistemazione e tentando di concatenarla secondo fatti, nomi, luoghi e date. Il carattere riduzionista della stessa concezione disciplinare si manifesta nella sua storia così concepita, che chiamiamo storia *internista* della disciplina in questione. È riconosciuto che è estremamente difficile suddividere in diverse discipline la conoscenza. Il fatto stesso di stabilire norme e criteri che permettano di sistemare la conoscenza in un «ordine» disciplinare lascia a margine altre manifestazioni della conoscenza che non obbediscono a quelle norme.

Ora, la definizione di criteri è un prodotto sociale. La stessa cosa si dà nel caso della conoscenza che, cognitivamente e storicamente, appare come un tutt'uno. Come dice A. N. Whitehead, «il mondo reale non si manifesta attraverso algebra, geometria e fisica, ma si mostra nella sua totalità».

Ammettendo che la fonte principale di conoscenza è la realtà nella quale siamo immersi, la conoscenza si manifesta in modo totale, olisticamente, e non seguendo qualsivoglia differenziazione disciplinare. Lo spezzettamento della conoscenza in «clubs» disciplinari si fa obbedendo a criteri fissati *a posteriori* e naturalmente permettendo «l'entrata» solo di certe conoscenze, solo a certi aspetti della realtà.

Questo procedimento disciplinare porta a perdere la visione globale della realtà e la storia della conoscenza delineata in questo schema *internista* naturalmente illustra ben poco ciò che effettivamente rappresenta la disciplina in questione nell'evoluzione intellettuale dell'umanità.

Nel nostro contesto olistico, il punto di vista sulla storia consisterà essenzialmente in un'analisi critica della generazione e produzione di conoscenza, della sua istituzionalizzazione e della sua trasmissione. In tal modo, ci accosteremo al processo psicoemozionale della generazione di conoscenza (creatività) e al processo intellettuale della sua produzione, ai meccanismi sociali di istituzionalizzazione della conoscenza (accademia) e della sua trasmissione.

Il Programma Etnomatematica vuole abbracciare tutto questo (D'Ambrosio, 2002b).

L'educazione matematica

Una discussione di carattere generale sull'educazione deve tenere come punto di partenza l'arte o la tecnica di spiegare e conoscere, intese come parte di un'azione che trae origine da una realtà, nella quale evidenziamo le radici socioculturali. Prendiamo come riferimento la didattica della matematica perché riteniamo che in questa si identifichino alcune delle maggiori distorsioni dei sistemi educativi. Ma l'analisi si applica ugualmente alle varie discipline scientifiche, dell'area delle scienze sociali, del linguaggio, infine a tutto il sistema scolastico.

Nell'insegnamento della matematica c'è un carattere di universalità, perché ciò che osserviamo accade praticamente in tutti i Paesi e con alto livello di intensità. È logico aspettarsi questa universalità, per le ragioni storiche che abbiamo discusso sopra. Così è ben giustificato iniziare la nostra critica proprio dall'effettivo insegnamento della matematica.

Domandiamoci: *perché si insegna matematica nelle scuole con tale universalità ed intensità?* Con «universalità» intendiamo dire: in tutti i Paesi del mondo e praticamente la stessa matematica. Con «intensità» vogliamo dire: in quasi tutti gli anni di scolarità e per tutti, con un peso molto grande nella distribuzione dei corsi nelle scuole. Effettivamente, la matematica ha uno statuto privilegiato.

Potremmo proporre molte risposte a questa domanda fondamentale. Elencheremo alcune di quelle che più tradizionalmente si danno, ma in forma di interrogativi. L'ordine in cui presentiamo questi interrogativi rappresenta quello che abbiamo identificato, attraverso la letteratura più classica sul tema, come l'ordine di priorità tradizionalmente indicato per giustificare l'insegnamento della matematica.

1. Per la sua bellezza intrinseca come costruzione logica, formale ecc.?

Certo, la matematica soddisfa pienamente questa risposta, ma difficilmente si giustifica un'importanza così grande, maggiore di quella attribuita ad esempio alla pittura o alla musica, che sono anch'esse costruzioni logiche, formali e di una bellezza incredibile. Così come molte altre cose belle che non hanno spazio a scuola.

2. Per la sua stessa universalità?

Certo, la matematica ha un carattere di grande universalità, così come anche la pittura, il cinema e innumerevoli altre manifestazioni culturali. In sintesi, questo non è sufficiente a giustificare la sua presenza così caratterizzante nei sistemi scolastici.

3. Perché aiuta a pensare con chiarezza e a ragionare meglio?

Certo, tuttavia anche gli scacchi hanno questa qualità, sono molto affascinanti eppure non hanno spazio nei sistemi scolastici. La stessa cosa può dirsi di molti altri giochi ed esercizi di logica e ragionamento. Inoltre, come dice bene Hans Freudental, tutte le discipline servono a questi propositi, se no perché mantenerle nelle scuole?

Le caratteristiche *1, 2* e *3* sono di natura internalista ed in esse la stessa disciplina – in questo caso la matematica – è il fattore determinante della sua importanza. È la matematica per la matematica, con alcuni effetti che derivano nello sviluppo dello stesso pensiero matematico. Vengono poi offerte altre ragioni, di natura tipicamente esternalista. Esaminiamole.

4. Perché è parte integrante delle nostre stesse radici culturali?

Effettivamente, come generalmente accade con le posizioni esternaliste, si va più lontano nella discussione. Ma chiediamoci: che cosa vuol dire «nostre radici culturali»? Chi sono coloro che detengono le radici culturali della matematica? Quali sono gli *eroi* della storia della matematica? Se pensiamo al Messico, ad esempio, che hanno a che fare Euclide, o Cardano, o Newton con le radici culturali del popolo messicano? E con quello del Brasile? E del Senegal? E dell'India? E del Giappone? O della nazione Sioux? In realtà, dicendo così si intendono quelle radici culturali che sono proprie di un processo «civilizzatore» che ha al massimo cinque secoli, periodo assai corto nella storia culturale dell'umanità. Sono le radici culturali dell'espansione della civiltà occidentale, connesse con il sistema di dominazione politica ed economica che è il risultato di questo processo di espansione. Parlando di radici socioculturali non possiamo dimenticare queste considerazioni e d'altra parte la matematica, come conoscenza di base per la tecnologia e per il modello organizzativo della società moderna, è presente in modo molto intenso in tutto questo. La matematica e il sistema di dominazione che prevale nelle relazioni con quello che oggi è il Terzo Mondo sono intimamente connessi, allo stesso modo in cui lo sono la matematica ed i processi di differenziazione sociale interna nei vari Paesi, inclusi quelli sviluppati. Riassumendo, la matematica è connessa ad un sistema di dominazione ed alla sua struttura di potere. Studiando didattica della matematica ciò non può essere dimenticato.

5. Perché è utile?

Certo, tuttavia una volta di più ci si deve domandare: utile per chi? Chi più beneficia della preparazione matematica delle masse? Si vede, in molti Paesi ed in modo assai chiaro, che la matematica è stata utilizzata come strumento di selezione sociale, come un filtro per la scelta degli elementi utili alla struttura di potere. Così già diceva Platone!

Apparentemente, i punti *4* e *5* ci conducono a considerazioni assolutamente negative. Ma non dimentichiamoci che, allo stesso tempo, la matematica può essere uno dei più forti fattori di progresso sociale.

Respingiamo quella didattica della matematica che, ignorando le questioni che risultano dalle considerazioni *4* e *5*, si pone al servizio della struttura di potere dominante, mantenendo e rinforzando le disuguaglianze e le ingiustizie sociali che prevalgono nelle relazioni tra i Paesi e nelle relazioni socioeconomiche interne a ciascun Paese. Combattiamo questa didattica della matematica e la combattiamo criticando i meccanismi che portano la matematica a sottostare a questa funzione poco degna dei sistemi scolastici. Questi meccanismi sono molteplici, ma alcuni possono essere identificati immediatamente, come ad esempio l'*intollerabile bocciatura*, l'*obsolescenza dei programmi* e la *ciclicità discriminatoria*. Analizziamo ciascuno di essi.

Bocciatura intollerabile – Sia dal punto di vista dell’apprendimento, sia dal punto di vista sociale, la bocciatura è inammissibile. Gli esami debbono semplicemente essere aboliti ed in loro luogo creati meccanismi di valutazione costruttiva (Amabile, 1983). È assolutamente inammissibile che un esame possa causare una retrocessione nello scorrere del tempo biologico e psicologico di un individuo. Inoltre, le conseguenze economiche e sociali della bocciatura, come ad esempio l’emarginazione, sono intollerabili per qualunque società.

Programmi obsoleti – Educazione è futuro. È nostra missione preparare i giovani per il mondo di domani. I programmi di matematica sono, in maggior parte, giustificati esclusivamente perché «ai miei tempi si faceva così». L’obsolescenza dei programmi matematici è assolutamente ingiustificabile.

Ciclicità discriminatoria – L’obbligatorietà di un ciclo completo è, per molti Paesi e classi sociali, utopica ed illusoria. In molti casi non è possibile per un bambino restare più di uno o due anni a scuola. Ma la matematica è organizzata in tal modo che è solamente dopo otto o nove che la scolarità è riconosciuta. Ciò è assolutamente discriminatorio per le classi meno privilegiate. Bisogna ricercare una completezza quasi continua, ad esempio con organizzazioni curricolari modulari.

Eliminando i fattori negativi, soprattutto i tre ora esposti, potremmo difendere, senza esitazione, la matematica come fattore di liberazione individuale e politica, come strumento per la vita e per il lavoro. In queste condizioni, la nostra posizione giustifica la matematica nelle scuole per le seguenti ragioni:

Perché è utile come strumento per la vita – Questo significa sviluppare la capacità dell’allievo a governare le situazioni reali che si presentano in ogni momento nel modo più vario. Ciò non si ottiene con la semplice capacità di fare conti e neppure con l’abilità nel risolvere problemi che sono presentati all’allievo in maniera artificiosa. La capacità di gestire situazioni nuove, reali, può essere raggiunta molto bene con la *modellizzazione* e la *formulazione di problemi*, che purtroppo non sono presenti nei nostri curricoli antiquati. Equipaggiare per la vita significa anche demistificare i fenomeni, sradicare la «paura» del soprannaturale. Ciò si consegue mediante una *matematica dei fenomeni*, integrata con le più varie scienze. La preparazione per la vita dipende, in una democrazia, da una preparazione alla partecipazione politica, a un voto cosciente e alla capacità di seguire gli andamenti politici. Per questo occorrono capacità di analizzare e interpretare dati statistici, nozioni di economia e sulla risoluzione delle situazioni di conflitto e di decisione. Così, non può mancare nel curricolo lo studio di *statistica e probabilità, economia e situazioni di conflitto (Teoria dei Giochi)*.

Perché è utile come strumento per il lavoro – Naturalmente non sono i lavori di ieri che interessano ai promossi della scuola del domani. Credo che uno dei maggiori mali che la scuola perpetra sia quello di seguire l’avviso che *computers*, *calcolatori* e cose del genere non sono cose per le scuole dei poveri. Al contrario: solo una scuola di classe alta può concedersi il lusso di non avere un computer. Una scuola di classe povera ha necessità di mostrare ai suoi alunni questi strumenti che saranno presenti in tutto il mercato del lavoro immediato. Se un bambino di classe povera non vede a scuola un computer, dato che mai avrà opportunità di averci a che fare in casa sua, sarà condannato ad accettare i peggiori impieghi che gli si offrono. Non sarà reso abile nemmeno a lavorare come cassiere in un grande magazzino od in una banca. È inaccettabile che la didattica della matematica ignori questo. Ignorare la presenza di computers e calcolatori nella didattica della matematica significa condannare gli studenti ad una subordinazione totale al sotto-lavoro (Upinski, 1985).

Così come abbiamo visto l'utilità della matematica nei vari aspetti summenzionati, vediamo le sue radici socioculturali come un fattore di grande importanza nella giustificazione di una educazione matematica per tutti.

Perché è parte integrante delle nostre radici culturali – Anche qui c'è qualcosa che deve essere analizzato con molta attenzione. Le radici culturali che compongono la società sono le più varie. Ciò che chiamiamo matematica è una forma culturale molto particolare che ha le sue origini in un certo modo di trattare quantità, misure, forme ed operazioni, caratteristiche di un modo di pensare, di ragionare e di una logica inserita in un sistema di pensiero che identifichiamo come «il pensiero occidentale». Naturalmente, gruppi culturali differenti hanno una maniera differente di procedere nei loro schemi logici. Entrano qui in gioco fattori di natura linguistica, religiosa, morale e, chi lo sa, persino genetica. Naturalmente il fatto di trattare quantità e di conseguenza numeri, forme e relazioni geometriche, misure, classificazioni, insomma tutto ciò che è dominio della matematica elementare, segue direzioni molto differenti legate al modello culturale al quale appartiene l'alunno. Ogni gruppo culturale ha le sue forme di matematizzazione. Non si può ignorare questo e non rispettare queste particolarità all'entrata del bambino nella scuola. In quel momento, tutto il passato culturale del bambino deve essere rispettato. Ciò non solo gli darà fiducia nella propria conoscenza, ma gli conferirà anche una certa dignità, vedendo che le sue origini culturali sono accettate dal suo maestro e sentendo così che questo rispetto si estende anche alla sua famiglia ed alla sua cultura. Inoltre, l'uso di conoscenze che lui e i suoi familiari dominano gli dà sicurezza e importanza per sé stesso e per le sue decisioni. È il processo di liberazione dell'individuo a mettersi in gioco.

D’Ambrosio U.
Una riflessione sull’Etnomatematica: perché insegnare Matematica?. In D’Amore B. e Sbaragli S. (a cura di) (2002). *Sulla Didatica della Matematica e sulle sue Applicazione*. Atti del Convegno «Incontri con la matematica n. 16» (pp.13-23). Bologna: Pitagora, 2002.

D’Ambrosio U.
Etnomatematica, Prefazione di Bruno D’Amore, (traduzione di Giovanni G. Nicosia e Maria Cristina Bonomi Baruffi). Bologna: Pitagora, 2002.

Amabile T.
The social psychology of creativity. New York: Springer, 1983.

Upinski A.A.
La perversion mathématique: l’oeil du pouvoir. Monaco: Éditions du Rocher, 1985.

3. Costruire le conoscenze necessarie per insegnare la matematica. Pratiche sociali e tecnologia

Salvador Llinares (sllinares@ua.es)
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante, España

From a socio-cultural perspective, learning relates to the appropriation and the mastery of tools allowing to think and act within a "community of practice". Two ideas are fundamental here. First of all, knowledge must be seen as the use of physical and conceptual tools. Secondly, learning must be considered as the transformation of the individual through increasing participation to social practices depending on the nature of the tasks to be faced. An implication of this way of conceiving learning is the role of the social component in the construction of knowledge.

Introduzione

Imparare, da un punto di vista socioculturale, è in relazione alle modalità con le quali le persone si appropriano degli strumenti per pensare ed agire in una comunità di pratica. Da questo punto di vista sono importanti due idee. La prima, che la conoscenza venga vista come l'uso di strumenti fisici e concettuali. La seconda, che l'imparare venga visto come la trasformazione delle persone mediante una crescente partecipazione alle pratiche sociali determinate dalla natura dei compiti che svolgono. Una conseguenza di questo modo di interpretare l'apprendimento è il ruolo svolto «da ciò che è sociale» nella costruzione della conoscenza.

Questa interpretazione ha conseguenze sulla progettazione dei compiti degli ambienti di apprendimento che hanno come obiettivo la costruzione delle conoscenze necessarie per insegnare la matematica. Le caratteristiche degli ambienti di apprendimento progettati «ad hoc», che integrano dibattiti virtuali come lo spazio per sostenere le interazioni tra gli «studenti insegnanti»[1] mentre risolvono compiti professionali (attività autentiche), mettono in mostra l'utilità delle Tecnologie delle comunicazioni e dell'informazione. Ma si segnala anche la difficoltà di generare interazioni produttive e di stabilire «comunità di apprendisti» come mezzo per preparare gli «studenti insegnanti» di matematica a sviluppare «abilità» sociali come docenti.

1. Insegnare matematica come una pratica: implicazioni nella formazione dei professori di matematica

La formazione degli insegnanti enfatizza la necessità di pensare alla formazione universitaria al fine di preparare il soggetto a realizzare «qualcosa» in modo competente alla fine del processo educativo e ad avere acquisito i processi che per-

1. Con la dizione «studenti insegnanti» intendiamo, d'ora in poi, studenti universitari di corsi di laurea pensati per la formazione dei futuri insegnanti di matematica. [NdT]

mettono di continuare ad apprendere. In questa situazione, per progettare delle opportunità per apprendere ad insegnare è necessario svolgere due compiti previ:

a) analizzare l'attività nella quale si pretende che l'individuo diventi competente, e
b) identificare le competenze per la realizzazione di tale attività (e le conoscenze fondamentali).

Nella professione di docente di matematica l'attività vincolante è quella di «insegnare la matematica». Nei programmi di formazione degli insegnanti, chiedersi che cosa significa apprendere a insegnare matematica dal punto di vista dell'«apprendere una pratica» implica assumere la nozione di pratica come:

- realizzazione di compiti (sistema di attività) per raggiungere un determinato fine,
- fare uso di strumenti e
- giustificarne l'uso.

Quindi, l'identificazione delle specifiche competenze per l'insegnamento della matematica passa attraverso l'analisi del «sistema di attività» che compongono l'attività dell'insegnare la matematica. Per sviluppare ognuno di questi «sistemi di attività» lo studente deve arrivare a essere competente nei diversi aspetti che definiscono ognuna di queste attività e deve dunque conoscere le basi di tale competenza.

Da un punto di vista socioculturale, imparare a insegnare la matematica consiste:

- nell'imparare l'uso di strumenti concettuali e/o tecnici nell'attività dell'insegnamento della matematica, e
- nel partecipare a un processo sociale di costruzione della conoscenza.

Queste due caratteristiche dell'apprendimento hanno conseguenze importanti, se si pensa al processo «diventare un docente di matematica» (costruzione di conoscenze e forme di partecipazione in qualità di docente) e quindi alla forma in cui vengono progettate le opportunità per imparare ad insegnare la matematica.

1.1. Apprendere a insegnare la matematica: apprendere a usare strumenti nell'attività dell'insegnamento della matematica

Il bisogno di identificare le conoscenze necessarie per insegnare la matematica è sempre stato un tema ricorrente nella formazione dei docenti. D'altra parte, la caratterizzazione delle componenti conoscitive del docente di matematica può assumere una diversa direzione se guardiamo la sua formazione in un contesto nel quale si apprende un'«abilità». Visti in questo modo, gli apporti delle analisi dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica e il ruolo che assume il docente nei processi delle costituzioni dei significati matematici in aula (Escudero, 2003; Llinares, 2000) permettono l'identificazione delle conoscenze dell'insegnante che giustificano una determinata «azione». Trovare il modo di integrare queste conoscenze nei programmi di formazione è un problema attuale.

Questo punto di vista sottolinea due cose. Da una parte, l'importanza come strategia di formazione dell'uso di «narrazioni» (sotto forma di testo o video), vignette ecc. intese come «racconti della pratica» dispensati dal professore (o dagli studenti insegnanti durante i loro periodi di stage come insegnanti). Dall'altra parte, si sottolinea l'importanza delle riflessioni sul carattere professionale del lavoro del docente di matematica nelle quali si ammette l'esistenza di una conoscenza pratica condivisa con altre componenti di questa categoria di «professionisti».

In questo modo, considerando l'insegnamento della matematica come un'«abilità» che deve essere capita e imparata, possiamo identificare alcuni compiti che l'articolano e le componenti delle conoscenze professionali del docente che permettono la loro realizzazione, come, ad esempio:

- analizzare, diagnosticare e dare un significato alle produzioni degli allievi, confrontando queste produzioni con le proprie aspettative (obiettivi). Il processo mediante il quale gli studenti insegnanti danno un senso alle produzioni dei propri allievi si basa sull'uso di determinate conoscenze concettuali sotto forma di «strumenti». Ad esempio, l'uso della terna Inter-Intra-Trans di Piaget e García (1989) per poter dare un significato alle diverse forme nelle quali gli allievi si appropriano delle nozioni matematiche; o l'uso delle informazioni sulla natura degli errori commessi e le difficoltà degli allievi (Socas, 1997);
- pianificare e organizzare il contenuto matematico per insegnarlo – determinare piani d'azione. Il processo mediante il quale gli studenti insegnanti possono analizzare e dare un significato a questo tipo di attività si basa sullo sviluppo delle capacità di usare conoscenze concettuali come, ad esempio, le idee di «situazioni didattiche»[2], «ingegneria didattica»[3], «elementi della trasposizione didattica»[4], oppure «organizzatori curricolari»[5];
- dare un significato e gestire la comunicazione matematica nell'aula, formulare domande che permettano di legare le concezioni precedenti con le nuove, sottolineare e valorizzare i diversi apporti, identificare e caratterizzare le norme socio-matematiche che regolano i processi di comunicazione matematica nell'aula. Vale a dire, valutare le condizioni epistemologiche delle conoscenze matematiche in diversi contesti sociali d'insegnamento-apprendimento e di comunicazione matematica – conoscenza epistemologica della matematica in contesti di apprendimento sociale in relazione con le conoscenze professionali del docente di matematica vincolato a questo compito; Steinbring (1998) segnala:
  "This important component of epistemological knowledge of mathematics in social learning setting is not a systematized, canonical knowledge corpus which could be taught to future teachers in the way of a fixed curriculum. Rather, the epistemological knowledge consist of exemplary

2. Brousseau G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
3. Artigue M. (1992). Didactic engineering. In: Douady R., Mercier A. (Eds.) (1992). *Research in «Didactique» of Mathematics.* Grenoble: La Pensée Sauvage.
4. Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE-UB; Horsori editorial.
5. Rico L. (1997). Los organizadores del currículo de Matemáticas (39-60). In: Rico L. (Ed.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE-UB; Horsori editorial.

knowledge elements as it refers to case studies of analyses of teaching episodes or of interviews with students, and comprises historical, philosophical, and epistemological conceptual ideas" (p. 160).

Da questo punto di vista, le diverse componenti delle conoscenze professionali del docente di matematica possono essere viste come «strumenti» che permettono lo sviluppo della «capacità» di insegnare la matematica. Questa posizione, quando si applica al processo di apprendere a insegnare, implica il vedere il «processo di apprendere a insegnare» come un processo nel quale gli studenti insegnanti danno un significato e usano «strumenti» mirati a realizzare delle attività che costituiscano la «capacità» di insegnare la matematica. In questo senso si considera che apprendere a insegnare è un'azione «mediata» da strumenti[6].

Le prospettive socioculturali dell'apprendimento ampliano il significato dato al termine strumento a un oggetto fisico che permette anche l'inclusione di concetti, forme di ragionamento, modi di generare un certo discorso, tra le altre, che condizionano e permettono le interazioni all'interno delle «comunità di pratiche». In questo modo, possiamo considerare *strumenti tecnici* necessari per realizzare l'«abilità», ad esempio materiali e risorse didattiche – geopiani, software didattici come Cabri-Géomètre, Logo –, e *strumenti concettuali* costituiti dalle conoscenze concettuali sulle quali si basa la «capacità» di insegnare la matematica. Per esempio, i diversi tipi di problemi e le diverse strategie utilizzate dagli allievi nei problemi di proporzionalità (struttura moltiplicativa) (Bednarz, Janvier, 1996)[7], l'applicazione di modelli nell'apprendimento della matematica da una prospettiva neopiagetiana come APOs (Dubinsky, 1991)[8]. Vale a dire, concetti e costruzioni teoriche che permettono agli studenti insegnanti di poter realizzare un'analisi che vada più in là delle sole caratteristiche superficiali delle situazioni d'insegnamento-apprendimento della matematica, ossia capire e trattare la realtà (situazioni nelle quali si insegna e si apprende la matematica).

Ad esempio, Stienbring (1998), a partire dall'analisi di un episodio di insegnamento, identifica tre componenti della conoscenza epistemologica che dovrebbero essere introdotte nella formazione dei docenti di matematica:

- conoscenza del «carattere evolutivo» della conoscenza matematica;
- conoscenza del processo sociale interattivo della comunicazione matematica come sistema autonomo;
- conoscenza dell'interdipendenza delle condizioni sociali ed epistemologiche nella comunicazione umana.

6. Questa considerazione si basa sull'idea che noi come persone pensiamo ed agiamo aiutate da strumenti. Il significato del termine «strumento» come «qualsiasi mezzo, cosa o persona, di cui qualcuno si serve per raggiungere uno scopo» (Dizionario dell'uso dello Spagnolo, di María Moliner)*, «(fig.) quel che serve come mezzo per fare una cosa o raggiungere un fine. / Ciò di cui ci serviamo per fare una cosa» (Dizionario della Lingua Spagnola,* RAE, Espasa Calpe) porta con sé l'idea di un oggetto progettato ed usato per ampliare il potere delle azioni dell'individuo.
7. Bednarz N., Janvier B. (1996). Emergence and Development of algebra as a problem solving tool: Continuities and Discontinuities with aritmethic. In: Berdnardz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) (1996). Approaches to Algebra. Perspectivas for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academia Press.
8. Dubinsky E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced mathematical Thinking. (pp. 95-123). In: Tall D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academia Press.

Questi tre tipi di conoscenza sono gli «strumenti concettuali» che il docente di matematica deve utilizzare quando si considera o viene considerato il processo interattivo e sociale della comunicazione all'interno dell'aula di matematica e ci si concentra sulla problematica del come i segni matematici acquisiscano significato nel processo sociale interattivo dell'insegnamento-apprendimento.

D'altra parte, centrando l'attenzione sugli studenti insegnanti che utilizzano un determinato tipo di strumento, ci si vincola all'idea che l'uso di uno strumento cambi qualitativamente il flusso e la struttura dell'attività. Vale a dire, che la forma nella quale gli studenti insegnanti usano gli strumenti condiziona la pratica e, di conseguenza, ciò che s'impara e il processo che permette di arrivare ad essere «competente» nell'attività di insegnare la matematica. Così, la forma nella quale uno studente insegnante «usa» uno strumento particolare trasforma la sua attività. Ad esempio, l'uso dell'informazione teorica nei problemi aritmetici elementari di struttura moltiplicativa durante l'analisi di libri di testo ha messo in evidenza diversi livelli di sviluppo dell'analisi «del curricolo», realizzata dagli studenti insegnanti, in funzione del livello d'integrazione dell'informazione teorica nella presa di decisioni (García et al, 2004; Llinares, 2004a). Riuscire a essere competente nell'«abilità» di insegnare la matematica dipende dal modo in cui lo studente insegnante riesce a essere cosciente del potenziale dei diversi strumenti in suo possesso (tecnici e/o concettuali) e a sceglierli e usarli adeguatamente.

Da questo punto di vista, gli strumenti concettuali e tecnici svolgono ruoli diversi nella caratterizzazione dei compiti che definiscono la «capacità» di insegnare matematica. Mentre gli strumenti concettuali permettono di possedere determinate referenze mirate a interpretare le situazioni «concrete», condizionando ciò che si vede e come lo si vede, gli strumenti tecnici forniscono i mezzi per «fare determinate cose» nella pratica. Nell'insieme, l'uso e la creazione degli strumenti condiziona le interazioni nello sviluppo della pratica e, pertanto, la propria pratica.

Come integrare nei programmi di formazione i diversi elementi di conoscenza necessari per sviluppare la capacità di insegnare la matematica è un compito legato alla progettazione di situazioni di apprendimento, cioè di opportunità nelle quali gli studenti insegnanti possono dare significato e usare i mezzi per sviluppare l'insegnamento della matematica. In questo momento, dunque, occorre prendere in esame come uno studente insegnante possa raggiungere questa «capacità». È quindi importante iniziare a essere consapevoli che le decisioni relative alla formazione dei docenti devono essere articolate a partire dalle implicazioni derivate dalle teorie sull'apprendimento del docente.

2. Imparare a insegnare la matematica: imparare come fattore di partecipazione a un processo sociale di costruzione della conoscenza

La seconda caratteristica, derivata dalle prospettive socioculturali dell'apprendimento, che è anche un riferimento alla progettazione delle situazioni di apprendimento, è prendere coscienza del fatto che imparare a insegnare la matematica è argomento di partecipazione a un processo sociale di costruzione della conoscenza. Questa idea porta a sottolineare l'importanza di analizzare le relazioni tra:

- gli strumenti (concettuali e/o tecnici);
- le caratteristiche dell'uso dei vari strumenti nei diversi sistemi di attività nella pratica dell'insegnare la matematica;
- la natura degli ambienti dell'apprendimento stabiliti nei programmi di formazione (le forme nelle quali gli studenti insegnanti e i formatori di docenti interagiscono definisce una cultura ed un contesto di apprendimento);
- la conoscenza e i preconcetti degli studenti insegnanti che ci permetteranno di prestare attenzione ai vari aspetti dell'uso degli strumenti e delle implicazioni della teoria dell'apprendimento che giustifica la progettazione delle situazioni per apprendere ad insegnare.

Gli ambienti di apprendimento basati sui principi dell'apprendimento sociale implicano che gli «apprendisti» costruiscano attivamente un significato in collaborazione con gli altri. Da questa prospettiva, le idee teoriche provenienti dalla Didattica della Matematica possono essere usate come strumenti per risolvere situazioni, per guidare la partecipazione e favorire la comunicazione. Differenti strategie possono essere utilizzate dai formatori dei docenti, strategie che rispecchiano questi principi (dibattiti virtuali, analisi della pratica registrata in video, …). Esse mostrano la varietà dei ruoli che i formatori di docenti devono assumere e anche le difficoltà che incontrano. Per esempio, quale debba essere il ruolo del formatore di docenti quando attua da moderatore in un dibattito virtuale in una sessione d'analisi dell'insegnamento. Uno degli obiettivi del programma di formazione è che gli studenti insegnanti possano dotare di significato gli strumenti concettuali necessari allo sviluppo di una determinata pratica senza che essi vengano imposti dal proprio «formatore». Questa situazione mette in evidenza il ruolo che possono avere i preconcetti degli studenti insegnanti e in particolare il loro ruolo di «apprendisti». In questo contesto la costruzione di comunità di «apprendisti» non è compito facile, dato che poggia, secondo Shulman et al., (2004), su:

- attività nelle quali gli studenti insegnanti partecipano attivamente alle discussioni,
- riflessioni, momento nel quale lo studente insegnante riflette e analizza il proprio processo di pensiero,
- la collaborazione, per mezzo della quale gli studenti insegnanti si sostengono a vicenda,
- l'idea di comunità, secondo la quale la classe non è solo un insieme di individui ma una comunità di apprendisti.

Considerare questi quattro aspetti nella definizione delle opportunità di apprendere a insegnare fa in modo che i programmi di formazione per gli studenti insegnanti spostino l'attenzione dall'*individuale* al *sociale*. Questo spostamento ci obbliga a vedere ciò che l'individuo apporta alla «comunità di apprendisti» e ciò che la costituzione di una «comunità di apprendisti» apporta all'individuo che apprende. Stabilire la relazione tra l'individuale e il sociale nella progettazione delle attività di apprendimento può, tuttavia, generare qualche difficoltà.

Anche lo spostamento della visione individualista dell'apprendimento verso il riconoscimento del ruolo giocato dalle interazioni tra i partecipanti alle attività di apprendimento è importante, se si pensa all'apprendimento degli studenti insegnanti di matematica. Da questo punto di vista si ammette che la conoscenza e la forma nella quale essa viene utilizzata sono prodotti delle interazioni tra gli individui – la forma nella quale i gruppi ordinano le proprie esperienze e danno un senso al loro mondo. Un'idea chiave da questo punto di vista è la nozione di «comunità di dialogo» considerata come una comunità che condivide forme di pensiero e di comunicazione (Putman, Borko, 2000).

Da questa concezione della conoscenza come costruzione sociale deriva l'idea che è parte importante dell'apprendere a insegnare il riuscire ad «acculturarsi» in una «comunità d'insegnamento partecipativo» – vale a dire, imparare a pensare, parlare e agire come un docente di matematica. In quest'ottica, il formatore dei docenti assume il ruolo di «allenatore» e agevolatore che porta gli studenti insegnanti a interessarsi a ricerche e apprendimento attivo, a coinvolgersi in processi di riflessione e ragionamento sulla pratica dell'insegnamento. La caratteristica che viene qui sottolineata è che i formatori di docenti, gli studenti insegnanti, i maestri, i professori di scuole medie superiori ed i tutor dei «tirocinanti» trasmettono diversi tipi di conoscenze a proposito dell'insegnamento della matematica alla «comunità di dialogo». Ne segue che nella «comunità di dialogo», che può essere generata a partire da diverse «strutture di partecipazione», le idee o i concetti vengono concepiti come strumenti cognitivi con i quali pensare e ragionare.

L'idea della «comunità di dialogo» torna a sottolineare la necessità di coerenza nel discorso – indagine sistematica, critica, riflessione e uso di concetti come strumenti con i quali pensare – nei diversi ambiti di apprendimento nei quali si articolano i programmi di formazione. Ciò significa che gli studenti insegnanti devono appropriarsi delle componenti della conoscenza professionale (considerandole strumenti della capacità d'insegnare la matematica) ricercando modi di insegnamento, riflettendo sulle proprie concezioni relative alla natura della matematica e, come segnala Steinbring (1998), in relazione alla conoscenza epistemologica della matematica e cercando di andare oltre l'aspetto superficiale della comunicazione per arrivare ad essere coscienti delle condizioni epistemologiche e sociali nel processo di «generazione di significato».

Le prospettive socioculturali della cognizione vanno oltre l'idea della cognizione come un qualcosa di proprietà degli individui, segnalando che essa è «distribuita» attraverso diverse persone, e diversi «artefatti simbolici o fisici»: sistemi di rappresentazione di idee, software e mezzi informatici come strumenti che permettono di fare matematica in modo diverso, ecc. Questo modo d'intendere la cognizione è relativamente recente e riconosce la necessità di cercare un equilibrio tra attività che evidenziano il solo uso delle competenze individuali con attività che riconoscano l'apprendimento condiviso (Penalva et al., 2004). Questo punto di vista poggia sull'idea che gli strumenti e i sistemi di «simbolismi» utilizzati nei discorsi – si pensi all'insegnamento e al ruolo del docente – ne trasforma la cognizione implicata – e ritorna così l'idea dell'uso dei concetti come strumenti con i quali pensare alle attività di analisi e riflessione sull'operato (pratica).

D'altra parte, i mezzi messi a disposizione dei docenti dalle nuove tecnologie, come la posta elettronica, i forum di discussione virtuali o risorse multimediali (Canters et al. 2002; Goffree, Oonk, 1999; Llinares, 2002b; Penalva et al., 2004; Valls et al., 2003) iniziano a essere integrati come materiali e risorse curricolari all'interno del programma di formazione e permettono lo sviluppo dello scambio d'informazioni e prospettive di analisi delle diverse situazioni dell'insegnamento. L'architettura non lineare di queste risorse – per esempio i derivati della tecnologia multimediale – nella quale vengono messi a disposizione degli studenti insegnanti frammenti di video, informazione teorica, riflessioni di professori esperti e spazi virtuali per lo scambio di interpretazioni, permette che i risultati di riflessioni, indagini sistematiche o critiche siano fra loro diverse (Lampert, Ball, 1998; Mousley et al., 1996). La rappresentazione virtuale di situazioni di insegnamento-apprendimento della matematica dà la possibilità agli studenti insegnanti di conoscere diversi punti di vista nell'analisi di situazioni di insegnamento-apprendimento della matematica provenienti da professori tutori, formatori di professori e da altri studenti insegnanti. Pensare al ruolo delle risorse tecnologiche atte a creare nuovi tipi di comunità di discorso per i professori e alla maniera nella quale possono influenzare la conoscenza del docente, pone nuovi interrogativi per la ricerca centrata sull'analisi della conoscenza professionale e dell'apprendimento del docente.

La considerazione di questi aspetti nella progettazione degli ambienti di apprendimento per gli studenti insegnanti è un esempio di come i programmi di formazione comincino ad articolarsi tenendo conto di principi teorici provenienti dall'esperienza dei docenti. Nel seguito viene descritto un esempio della progettazione di situazioni di apprendimento che intende riflettere i principi teorici derivati dalle prospettive socioculturali precedentemente descritte.

2. Progettazione di ambienti di apprendimento. La costruzione di spazi di interazione sociale

Vincolare la progettazione di ambienti di apprendimento per gli studenti insegnanti ai principi dell'apprendimento che presuppongono che imparare sia:

- imparare a fare qualcosa con gli strumenti culturali (concettuali e/o tecnici) (Säljo, 1999),
- un argomento di partecipazione in un processo sociale di costruzione della conoscenza,

pone complicate questioni ai «formatori di docenti», tanto nella progettazione di compiti-attività che possono essere considerati potenzialmente utili (Llinares, 2004b), quanto nella forma nella quale possono essere creati spazi sociali di interazione all'interno dell'Università (allo scopo di rendere possibile la costruzione sociale della conoscenza). La creazione di strutture di partecipazione sociale fra studenti insegnanti non è facile. Nel corso di alcuni anni, alcuni di noi «formatori di docenti» abbiamo studiato condizioni che permettessero di potenziare questa interazione per lo sviluppo del processo sociale di costruzione della conoscenza professionale attraverso l'uso di «itinerari di apprendimento» (García, 2000, 2003; García, Sánchez, 2002; García et al, 2004). Gli «itinerari di apprendimento» sono la combinazione di proposte di «attività autentiche» per insegnare la matematica in «strutture di partecipazione» (vedi fig. 1) che si caratterizzano come segue:

- lavorare in piccoli gruppi, per poi passare a gruppi più grandi (comunità di «apprendisti»);

- produrre informazioni in modo collaborativo;
- dibattere e discutere su diverse interpretazioni;
- produrre un ragionamento pedagogico specifico all'insegnamento della matematica.

In questa sessione viene mostrato un esempio di situazione di apprendimento progettato secondo la «struttura di un itinerario di apprendimento» con l'obiettivo di potenziare la costruzione di spazi di interazione sociale, l'appoggio che fornisce la tecnologia e centrando l'analisi di una lezione di matematica (considerata come un'«attività autentica»). La possibilità di disporre di risorse tecniche fa nascere nuove questioni nella progettazione di ambienti di insegnamento della matematica che utilizzano questi strumenti.

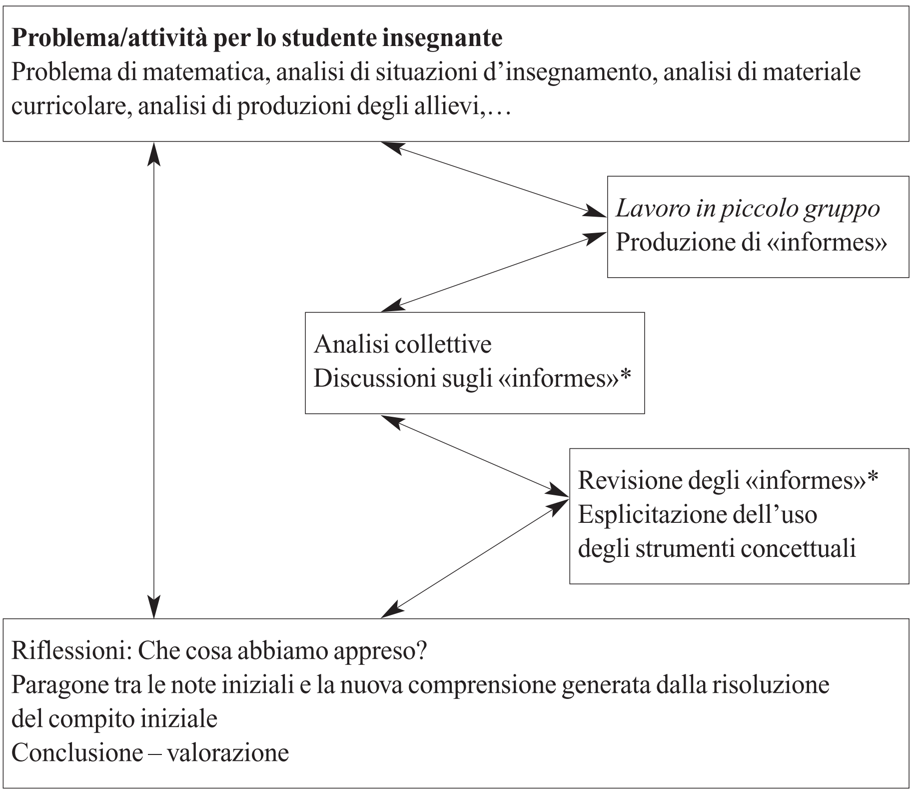


Figura 1. Adattamento della struttura di un itinerario di apprendimento (García , 2000, p. 63)

* Gli «informes» sono una sorta di resoconto commentato di un'attività che viene affidato ad uno studente per ciascuna sessione di lavoro; essi vengono redatti dall'allievo e poi letti e discussi pubblicamente durante la sessione successiva. È una tecnica didattica molto utilizzata in Spagna e nei Paesi dell'America Latina. [NdT]

La progettazione dell'ambiente di apprendimento che utilizza come «attività autentica» per gli studenti insegnanti l'analisi di una lezione di matematica poggia su tre idee base:

- l'analisi dell'insegnamento della matematica come un mezzo per capire la «pratica» d'insegnare. Questa prima idea implica l'uso di registrazioni di lezioni come materiale di lavoro per gli studenti insegnanti.
- La creazione di spazi d'interazione come mezzo per la costruzione delle conoscenze sociali. Questa idea è evidenziata nell'integrazione di dibattiti virtuali che permettono agli studenti insegnanti d'interagire con il materiale e con i propri compagni senza la necessità di trovarsi nello stesso luogo e momento; e
- Il carattere evolutivo del processo di costruzione della conoscenza necessaria per insegnare. Questa idea implica che l'ambiente progettato permetta agli studenti insegnanti di esplicitare le proprie concezioni, di «negoziare» nuovi significati e dà la possibilità di integrare a poco a poco l'uso di strumenti concettuali nell'analisi dell'insegnamento della matematica. Per questo motivo si strutturano le situazioni di apprendimento attraverso sessioni di lavoro, ciascuna definita da un obiettivo particolare, e se ne favorisce l'evoluzione a partire dai preconcetti degli studenti insegnanti, fino ad arrivare allo sviluppo delle componenti delle conoscenze professionali.

Le «situazioni» di apprendimento si implementano in una piattaforma chiamata «campus virtuale» dell'Università di Alicante alla quale possono accedere gli studenti insegnanti attraverso una password da qualsiasi computer collegato a Internet. La piattaforma permette agli studenti insegnanti di poter accedere al materiale – visionare i video e scaricare i documenti in formato testo – in qualsiasi momento e da qualsiasi luogo, facilitando in questo modo la «visione» delle lezioni indipendentemente dal fatto che siano o no nel campus dell'università. In questo senso, le disponibilità offerte dalla piattaforma interattiva dell'università per introdurre dibattiti virtuali come un mezzo per condividere le proprie analisi e le proprie interpretazioni nello svolgimento delle attività proposte dal programma di formazione dei maestri (Educazione Primaria, 6-12 anni) e nelle materie di Didattica della Matematica negli studi della laurea in Matematica (Licenciatura de Matemáticas) fornirono i primi riferimenti su come usare i dibattiti, le tutorie e gli archivi virtuali dei materiali in modo da creare spazi d'interazione che potessero potenziare la costruzione sociale delle nozioni (significati) (Llinares, 2002b; Penalva et al. 2004).

A partire da questi riferimenti e dalle analisi concettuali realizzate nelle sessioni precedenti sui diversi principi teorici a partire da un concetto fino al processo di apprendimento degli studenti insegnanti, si sviluppa un progetto nell'Università di Alicante[9] inteso a creare attività di apprendimento basate su registrazioni video[10]. L'obiettivo di questo progetto è di integrare:

9. Altri professori-ricercatori del gruppo TICEM-UA che partecipamno alla realizzazione di questi progetti sono Carmina Penalva, Germán Torregrosa, Julia Valls, Carolina Rey e Ana Cos.
10. Lo strumento «sessioni» che include i video come materiale di lavoro per gli studenti è sviluppato dai tecnici della UA: Santiago Moya e Iván Mingot.

- l'uso dei video come mezzo mediante il quale gli studenti insegnanti possano analizzare la «capacità» d'insegnare la matematica;
- gli spazi d'interazione virtuale che possono potenziare la costruzione sociale delle conoscenze.

Il quadro 1 presenta le relazioni tra i principi sui quali poggia il processo della costruzione della conoscenza necessaria per insegnare la matematica (apprendimenti del professore) e gli elementi (mezzi e risorse integrate) incorporati nella progettazione dell'ambiente di apprendimento.

Principi sui quali si basa il processo di costruzione della conoscenza necessaria per insegnare la matematica	***Elementi incorporati nella progettazione dell'ambiente di apprendimento usando piattaforme virtuali***
Precedenza all'«abilità di insegnare la matematica»	*integrare come materiale registrazioni video delle lezioni *trascrizione di lezioni
Costruzione sociale della conoscenza	*spazi d'interazione virtuale: dibattiti virtuali
Carattere evolutivo della costruzione della conoscenza: integrazione progressiva degli strumenti concettuali nello sviluppo dell'abilità	*struttura degli itinerari di formazione per mezzo di «sessioni virtuali»

Quadro 1. Relazione tra teorie sull'apprendimento del professore e la progettazione delle situazioni di apprendimento

La piattaforma sulla quale si costruisce l'ambiente di apprendimento permette agli studenti insegnanti l'esplorazione di una lezione di matematica nella sua totalità o di segmenti specifici corrispondenti ai diversi momenti di una lezione di matematica e permette pure di stabilire diversi dibattiti virtuali con i propri compagni in modo asincrono e con il sostegno di materiali diversi.

L'integrazione dell'analisi dell'insegnamento della matematica nella formazione dei docenti ha acquistato maggior importanza a partire dalla considerazione dell'«insegnamento della matematica come una pratica». Nell'organizzare l'apprendimento degli studenti insegnanti, per aiutarli a dare un significato all'abilità di insegnare la matematica, si è riconosciuta l'importanza del ruolo che possono assumere le registrazioni delle lezioni di matematica. In questo senso, il crescente riconoscimento, nella formazione dei docenti, della necessità che gli studenti insegnanti sviluppino una concezione dell'insegnamento della matematica come una abilità, ha messo in mostra la forza dell'uso delle registrazioni di sequenze d'insegnamento della matematica come materiale e risorsa della formazione. Il fatto che l'insegnamento della matematica sia un'abilità che deve essere appresa ha promosso l'uso delle registrazioni video nella formazione dei futuri professori e mostrato la sua forza come mezzo che permette di avere accesso a situazioni reali di lezioni, facilitando così l'analisi del processo d'insegnamento-apprendimento della matematica (Ball, Cohen, 1999; Canters et al., 2002; Dolk et al., 2002; Goffree, Oonk, 2001; Mousley, Sullivan, 1996). L'uso di registrazioni di lezioni di matematica (o di spezzoni di lezioni registrate in video) nei programmi di formazione dei professori ha come obiettivo quello di dare agli studenti insegnanti la possibilità di analizzare le condizioni e le componenti dell'insegnamento della matematica. Inoltre, rispecchia l'idea dell'organizzare la formazione dei professori dotando gli studenti insegnanti dei mezzi per poter apprendere l'abilità di insegnare la matematica. L'uso di registrazioni video di spezzoni di lezioni permette agli studenti insegnanti di appropriarsi progressiva-mente degli strumenti concettuali che permettono di arrivare più in là della sola identificazione delle caratteristiche superficiali dell'insegnamento (Herbst, Chazan, 2003).

L'*itinerario di apprendimento* si costruisce considerando «sessioni di lavoro» virtuali. In ciascuna di queste sessioni gli studenti hanno la possibilità di vedere aspetti di una lezione di matematica da diversi punti di vista (dalle proprie concezioni iniziali fino ad arrivare a utilizzare alcuni elementi di conoscenze concettuali introdotti nel programma di formazione). Questa organizzazione degli ambienti di apprendimento attraverso itinerari composti da sessioni cerca di mettere in luce il carattere evolutivo del processo della costruzione della conoscenza che occorre per insegnare (García et al., 2004; Goffree, Oonk, 2001; Llinares, 2004a). Le ricerche centrate sul processo di apprendimento degli studenti insegnanti indicano che la costruzione della conoscenza necessaria per insegnare la matematica deve essere un processo nel quale si incorporano in modo progressivo gli strumenti concettuali nelle diverse attività di analisi e riflessione. Questo processo di costruzione della conoscenza necessaria per insegnare la matematica ha inizio con la possibilità di rendere pubbliche e discutibili le concezioni iniziali degli studenti insegnanti sulla matematica, sull'apprendimento e sull'insegnamento della matematica e sul ruolo dell'insegnante. L'uso progressivo degli strumenti concettuali nelle attività di analisi e di interpretazione delle situazioni d'insegnamento apprendimento e il cambiamento graduale delle forme di partecipazione all'interno degli spazi di interazione sociale sono manifestazioni di questo processo di costruzione della conoscenza (Llinares, 2002a). Le sessioni di lavoro sono costituite da materiali (documenti in formato doc, video, connessioni a pagine web, …), da un dibattito virtuale e da un elenco di quesiti che permette e orienta l'organizzazione dell'attività degli studenti insegnanti. Il lavoro di questi ultimi nelle diverse sessioni permette di approfondire l'analisi in modo progressivo, integrando diversi strumenti in modo graduale nei dibattiti. In questo modo, la successione delle diverse sessioni che costituiscono l'itinerario di apprendimento consente di guidare il lavoro degli studenti insegnanti.

Ad esempio, si è organizzato un ambiente di apprendimento, per studenti di matematica iscritti a un corso di Didattica della Matematica, centrato sull'analisi di una lezione per allievi di 13-14 anni, attraverso tre «sessioni virtuali» che definivano un «itinerario di apprendimento»:

Sessione 1: ***Analisi di una lezione di matematica* 1*: Introduzione***

Obiettivi: esprimere le concezioni degli studenti insegnanti a partire dalle quali si assegna significato alla lezione di matematica; le caratteristiche dei problemi matematici proposti dal docente; come il docente gestisce il contenuto matematico; quali sono le caratteristiche dell'interazione tra il docente e gli studenti (qual è il ruolo dell'interazione e della comunicazione matematica nel processo di apprendimento che si crea).

Sessione 2: ***Analisi di una lezione di matematica* 2*: Approfondimento***

Obiettivi: Cominciare a usare strumenti concettuali, come l'idea di variabile didattica, e il ruolo delle norme sociomatematiche che reggono l'interazione tra il professore e gli allievi nella costruzione di un significato matematico.

Sessione 3: ***Analisi di una lezione di matematica*** **3:** ***Sintesi***

Obiettivi: Offrire una descrizione degli strumenti concettuali usati per analizzare la lezione o una delle parti considerate. Confrontare il contenuto dei diversi interventi nei dibattiti svolti nelle sessioni precedenti per poter identificare gli aspetti di ciò che si è arrivati ad apprendere sull'insegnamento della matematica.

La figura 2 mostra lo schermo del computer della sessione 1 «*Analisi dell'insegnamento della matematica* 1», nel quale si segnalano gli obiettivi, la metodologia e le caratteristiche delle altre sessioni che definiscono l'itinerario di apprendimento.

Figura 2. Schermata nella quale si descrive il formato di una sessione

In ciascuna delle sessioni di questo itinerario, gli studenti insegnanti hanno accesso a una registrazione di una lezione completa, così come a spezzoni della stessa: ciò permette loro di concentrare l'attenzione su aspetti particolari di ciò che è avvenuto in aula senza dover visionare l'intera lezione. L'uso di spezzoni della lezione, insieme alla registrazione completa della stessa, permette agli studenti insegnanti di focalizzare gli aspetti specifici dell'insegnamento nell'ottica globale di una lezione. Permette inoltre agli studenti insegnanti di porre in relazione successi specifici con azioni precedenti o successive, consentendo di porre l'attenzione su aspetti particolari senza perdere di vista la visione globale. È un tentativo di superare le limitazioni che derivano dal concentrarsi solo su momenti puntuali della lezione, senza fare riferimento al contesto globale nel quale sono inseriti, rendendo così possibile agli studenti insegnanti di studiare un aspetto particolare all'interno di un contesto globale, quando l'analisi lo richiede.

Le registrazioni sono accompagnate dalle riproduzioni delle interazioni verbali tra gli allievi e il professore durante la lezione; esse permettono agli studenti insegnanti di soffermarsi sui diversi apporti, sia degli allievi che del docente, durante il processo d'interazione e comunicazione matematica volto a dare significato a nozioni e a simboli matematici. Il materiale prodotto dagli allievi nella lezione e la registrazione di un'intervista con il professore, nella quale questi specifica i suoi obiettivi e le difficoltà che ha incontrato durante l'attuazione della lezione, permettono di effettuare un'analisi del contesto nel quale si è svolta la lezione e offrono i riferimenti necessari per il processo di analisi e interpretazione da parte degli studenti insegnanti. Le registrazioni video e i diversi materiali sotto forma di testo costituiscono le risorse in questi ambienti di apprendimento, risorse da usare in una serie di dibattiti virtuali che offrono lo spazio nel quale poter generare l'interazione necessaria alla costruzione sociale della conoscenza. La figura 3 mostra la distribuzione dei diversi aspetti delle «finestre» nel disegno di questo tipo di sessioni. Questa forma d'interazione permette la costruzione di gruppi di lavoro virtuali in ogni sessione (vedi fig. 4).

I dibattiti virtuali sono articolati in modo da fornire agli studenti insegnanti la possibilità di esprimere all'inizio le proprie concezioni precedenti su momenti particolari oggetto dell'analisi e di stabilire una prima interazione con i propri compagni nella quale poter evidenziare le discrepanze, in modo da attribuire un significato ai diversi momenti della lezione. I dibattiti concernenti l'analisi dei diversi aspetti di una lezione hanno come obiettivo di aiutare a trasformare le prese di posizioni «superficiali» iniziali in prese di posizioni più professionali, mediante l'introduzione, nel discorso che si genera, di strumenti concettuali pertinenti. La possibilità che gli studenti insegnanti «osservino» le lezioni o alcuni spezzoni specifici, analizzino i diversi aspetti e discutano le differenti interpretazioni attraverso uno spazio virtuale che non esige necessariamente di stare insieme, né di incontrarsi, inserisce nuove caratteristiche nella progettazione delle opportunità per apprendere a insegnare. Ad esempio, i quesiti che guidano il dibattito della seconda sessione «*Analisi di una lezione di matematica 2: Approfondimento*» sono:

a) a proposito delle caratteristiche dei problemi proposti:
   - che tipo di abilità si crede sviluppino i compiti proposti agli allievi
   - quali aspetti del concetto di simmetria pare vengano enfatizzati?
   - su che cosa si basa il tuo apporto?

b) a proposito della gestione del contenuto matematico da parte del professore:
   - in quali momenti il professore poggia il suo intervento nella gestione di una variabile didattica?
   - su che cosa si basa il suo apporto?

c) a proposito della comunicazione all'interno dell'aula e del processo di generazione di significato matematico:
   - in quali momenti credi che il professore stia usando una comunicazione di carattere frontale o dialogata?
   - che ruolo credi che abbiano queste forme di comunicazione nel processo mediante il quale gli allievi dotano di significato l'idea di simmetria?

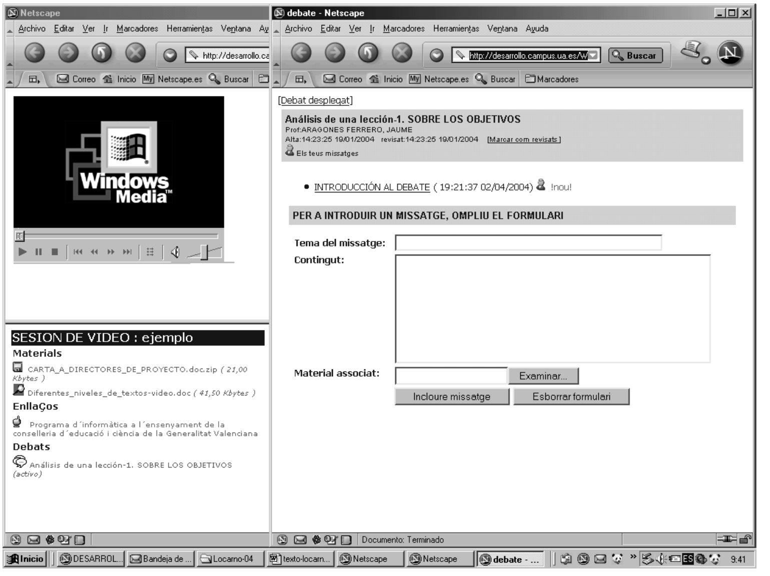


Figura 3. Aspetto della finestra della sessione in formato video che include la possibilità di visionare un video, partecipare a un dibattito e consultare in qualsiasi momento un elenco di documenti supplementari.

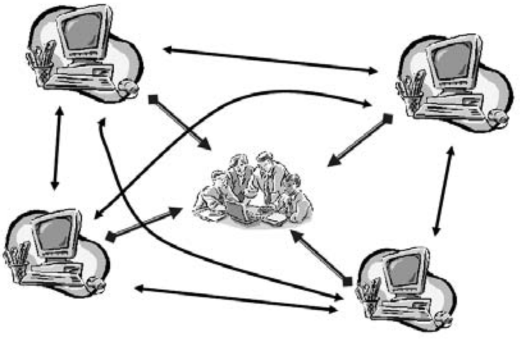


Figura 4. Struttura di un gruppo di lavoro virtuale

3. Difficoltà e limiti nella costituzione di una comunità di apprendisti.

Nelle progettazioni degli «ambienti» di apprendimento presentati, le attività degli studenti insegnanti e il loro processo di apprendimento non possono essere prestabiliti. Progettare e usare «ambienti» di apprendimento assumendo i principi teorici provenienti da prospettive socioculturali sull'apprendimento, significa soprattutto favorire lo sviluppo, da parte degli studenti insegnanti, di ruoli più attivi nell'apprendimento, ai quali sono molte volte già abituati. Ad esempio, la partecipazione a dibattiti virtuali o l'analisi di situazioni d'aula implica la necessità d'interagire con i propri compagni. L'interazione costruttiva si basa sulla capacità di ascoltare per dare un significato a ciò che qualcun altro dice per poi costruire di conseguenza. La costruzione di queste comunità di dialogo poggia sulla capacità di valorizzare ciò che è stato detto dagli altri e sulla possibilità di argomentare usando strumenti concettuali. Questo tipo di attività molte volte si scontra con preconcetti che gli studenti insegnanti portano nel loro programma di formazione. Così la relazione tra le concezioni e le conoscenze degli studenti insegnanti condiziona il modo di partecipare agli ambienti di apprendimento e quindi il loro apprendimento (Llinares, 2002b). In questo senso, il processo di apprendimento, se è visto come una questione di partecipazione a processi sociali della costruzione della conoscenza, può avere vantaggi o difficoltà. Attualmente si sta studiando e analizzando l'apprendimento degli studenti insegnanti generato in alcuni di questi ambienti (Penalva et al., 2003; Valls et al., 2004), ciò che può fornire informazioni che premettono di modificare le opportunità di apprendere il capitolo delle proporzioni. Questa relazione tra l'apprendimento degli studenti insegnanti e la progettazione di ambienti di apprendimento, realizzati dai formatori, mette in mostra le relazioni tra il processo di apprendimento degli studenti insegnanti e lo sviluppo professionale dei loro formatori (García et al, 2004).

Ball D., Cohen D.
Developing Practice, Developing Practitioners: Toward a Practice-Based Theory of Professional Education. In: Darling-Hammond L.,G. Sykes G. (eds.) (1999). *Teaching as the Learning Profession*. Handbook of Policy and Practice. San Francisco: Jossey-Bass Publishers, 1999.

Canters R., Eynde F., Verschaffel L., Elen J., Janssens S.
MILE-Flanders: a video-based learning environment as a powerful tool in the preservice training of primary school teachers. Paper presented at the Teaching Culture and the Quality of Learning, International Conference on the Contribution of video-based research to the improvement of education. MonteVerità / Ascona, Switzerland; June 2002.

Contreras L.C., Blanco L. (eds.)
Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente. Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres, 2002.

Daniel P.
Helping Beginning Teachers Link Theory to Practice: An Interactive Multimedia Environment for Mathematics and Science Teacher Preparation. *Journal of Teacher Education.* 47(3), (pp. 197-204), 1996.

Dolk M., Hertog J. den, Gravemeijer K.
Using multimedia cases for educating the primary school mathematics teacher educator: a design study. *International Journal of Educational Research*. 37, (pp. 161-178), 2002.

Escudero. I.
La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje. Tesis doctoral inédita. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla, 2003.

García, M. & Sánchez, V.
Una propuesta de formación de maestros desde la educación matemática. Adoptando una perspectiva situada. (pp. 59-89). En Contreras, L.C. & Blanco, L. (eds.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres, 2002.

García, M.; Sánchez, V.; Escudero, I. & Llinares, S.
The dialectic relationship between research and practice in Mathematics Teacher Education. Documento no publicado. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Sevilla, España, 2004.

Goffree, F. & Oonk, W.
Digitalizing Real Teaching Practice for teacher Education Programmes: The MILE-Approach (pp. 111-146). En F. Lin & T. Cooney (eds.) *Making Sense of Mathematics Teacher Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.

Herbst, P. & Chazan, D.
Exploring the practical Rationality of mathematics Teaching Through Converstions about Videotaped episodes: The Case of Engaging Students in Proving. *For the learning of Mathematics*, 23 (1), (pp. 2-14), 2003.

Horvath, J. & Lehrer, R.
The design of case-based Hypermedia Teaching tool. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 5, (pp. 115-141), 2000.

Lampert, M. & Ball, D.
Teaching Multimedia and Mathematics. Investigations of Real Practice. Teachers College, Columbia University: New York, 1998.

Llinares, S.
Preservice Elementary Teachers and Learning to Teach Mathematics. Relatinship between context, task and cognitive activity. En N. Ellerton (ed.) *Mathematics Teacher Development: International Perspectives.* (pp. 107-119). Australia Meridian Press, 1999.

Llinares, S.
Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas (pp.109-132). En J.P. da Ponte & L. Serrazina (Org.) *Educaçao matemática em Portugal, Espanha e Itália.* Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Pottuguesa de Ciencias de Educaçao, Lisboa, 2000.

Llinares, S.
Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs (pp. 195-209). En G.C. Leder; E. Pehkonen, & G. Torner (eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Holanda, 2002-a.

Llinares, S.
Arrivare as essere insegnante di matematica: «casi» e «dibattiti elettronici». *La matemática e la seua didattica*, n. 3, (pp. 258-277), 2002-b.

Llinares, S.
La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la Educación Primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 2004-a.

Llinares, S.
Formación de profesores de matemáticas. Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor y diseño de entornos de aprendizaje. En D. Couso & E. Badillo (coord.) *Reflexiones para la enseñanza de als Matemáticas y de las Ciencias Experimentales.* Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá, Colombia, 2004-b.

Mousley, J. & Sullivan, P.
Learning about teaching. An interactive tutorial program to facilitate the study of teaching. ASMT: Adelaida; CSMSEE: Deakin University; MTLC; ACU, 1996.

Penalva, C.; LLinares, S.; Torregrosa, G.; Valls, J., Cos, A. & Rey, C.
Interacción y aprendizaje en la Universidad. El reto del uso de las TICs en la docencia en Didáctica de la Matemática. Comunicación en las II Jornadas de Investigación en Docencia Universitaria. Redes de Colaboración para el Análisis de la Práctica docente. Universidad de Alicante, España, 2004.

Penalva, M.C.; Llinares, S.; Torregrosa, G. & Valls, J.
Entornos de aprendizaje en la formación de maestros en el Área de Didáctica de la Matemática (pp. 243-264). En M.A. Martinez (ed.) *Investigar en docencia universitaria. Redes de colaboración para el aprendizaje.* Alcoy: Marfil; Alicante, 2004.

Piaget, J. & García, R.
Psychogenesis and the History of Science. New York: Columbia University Press, 1989.

Putnam, R. & Borko, H.
What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning. *Educational Researcher*, 29(1), (pp. 4-15), 2000.

Sánchez, V. & Llinares, S.
Imágenes sobre las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes para profesores de Secundaria y tareas matemáticas escolares. *Revista de Educación*, n. 329, (pp. 443-461), 2002.

Sánchez, V. & Llinares, S.
Four teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, (pp. 5-25), 2003.

Shulman, L. & Gamoran, M.
Fostering communities of teachers as learners: disciplinary perspectives. *Journal of Curriculum Studies*, 36(2), (pp. 135-140), 2004.

Socas, M.
Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria. (pp. 125-154). En L. Rico (coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE-UB; Horsori editorial : Barcelona, 1997.

Steinbring, H.
Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, (pp. 157-189), 1998.

Torregrosa, G; Haro, M.J.; & Llinares, S.
Conceptions regarding the notion of Proof.. The influence of virtual debates (pp. 1601-1605). En *Advances in Technology-based Education: toward a Knowledge-based Society. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003)*, Badajoz, España, 2003.

Valls, J.; Cos, A. & Llinares, S.
Virtual debate vs in-public debate as learning environments for mathematics education (pp. 1386-1390). En *Advances in Technology-based Education: toward a Knowledge-based Society. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003)*, Badajoz, España, 2003.

4. Ostacoli epistemologici e didattici nell'apprendimento dell'infinito

Gianfranco Arrigo, docente di Didattica della Matematica presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno, membro del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Bologna

In this paper I would like to reflect on the researches, carried out with Bruno D'Amore, concerning the epistemological and didactic obstacles which interfere with learning the concept of infinite in progress (or actual). In a first work (1999), we highlighted the great difficulties which drive almost all the students (aged between 17 and 19) to reject the famous theorem of Cantor, which states that there are as many points in a square as in one of its sides. In a second research (2002), we examined closely the way in which students are willing to accept the existence of various infinite cardinalities. From these studies comes an important message for the teachers, i.e. that of getting the pupils used to the mathematical infinite as soon as possible.

1. Introduzione

Nella seconda metà dei miei trent'anni d'insegnamento della matematica nel liceo avvertii un profondo disagio che, in un certo senso, ha cambiato la mia vita professionale. Mi sono accorto, non senza sgomento, che i miei studenti (ma forse anche altri), all'esame di maturità, erano, sì, in grado di calcolare limiti, derivate e integrali, sapevano pure riprodurre le dimostrazioni di famosi teoremi, come quelli detti «di Rolle», «del valor medio del calcolo differenziale», «teorema fondamentale del calcolo infinitesimale», ecc., ma non riuscivano a capirne il senso. Mi spiego con un esempio, scelto fra quelli che mi hanno messo più in crisi. Dopo aver trattato in classe il concetto di limite di una successione numerica, corredato di tutte le conoscenze sulle operazioni con i limiti, solevo applicare queste nuove conoscenze a problemi concernenti le successioni numeriche e le serie infinite a termini positivi. Uno dei casi classici che presentavo ai miei studenti era quello della serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad , \quad \text{con } q \geq 0$$

In particolare, tutti insieme si (ri)scopriva che:

per $q \in \left]0,1\right[$, la serie converge verso il limite $\dfrac{1}{1-q}$

I miei studenti erano tutti in grado di calcolare, per esempio, il limite della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \qquad [*]$$

Fin qui tutto bene: c'era di che vantarsene, soprattutto perché questi risultati si potevano ottenere anche con classi poco motivate nei confronti dell'apprendimento matematico. Quando però tentai di indagare che cosa, realmente, gli allievi avevano capito e appreso, mi cadde in testa il mondo. Nei colloqui clinici, la stragrande maggioranza degli allievi si comportava più o meno così[1]:

Insegnante: Nel lavoro di verifica hai calcolato il limite della serie [*] e hai trovato 2. Sei sicuro dell'esattezza di questo risultato?
Studente: Aspetti: posso controllare?
Insegnante: Fai pure…
Studente: (dopo un po') Sì, è corretto.
Insegnante: Ora cerchiamo di ragionare insieme. Addizioniamo uno dopo l'altro i primi quattro addendi di questa somma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1+0{,}5+0{,}25+0{,}125=1{,}875$$

Ciò significa che i primi 4 addendi, sommati insieme, danno un numero già molto vicino a 2.
Studente: Sì, in effetti manca poco per arrivare a 2.
Insegnante: Se continuiamo a sommare, ogni volta aggiungiamo un numero strettamente positivo: sei d'accordo?
Studente: Sì, ovvio.
Insegnante: Quanti addendi dobbiamo sommare per ottenere il valore della serie data?
Studente: Infiniti.
Insegnante: L'hai detto: e se noi continuassimo a sommare numeri positivi, senza mai smettere, quale valore otterremmo?
Studente: Ehm, secondo me, se potessimo veramente continuare a sommare numeri positivi otterremmo numeri ben più grandi di 2…
Insegnante: Per esempio?
Studente: Beh, 3 di sicuro, ma poi anche 10, 100, 1000, che ne so?
Insegnante: Allora ammetti che il risultato 2 non sta in piedi?
Studente: Diciamo che *matematicamente* il risultato sarebbe 2, ma *in realtà* si ottengono numeri ben più grandi.

Ho subito capito che dietro a quelle due parole – *matematicamente* e *in realtà* – era nascosto un importante nodo riguardante l'apprendimento.

Conobbi poi Bruno D'Amore e da quel momento la ricerca sugli ostacoli epistemologici e didattici nell'apprendimento dell'infinito in atto fu innescata. Dedicammo alcuni anni all'esame della letteratura concernente lo sviluppo filogenetico[2] del

1. Questa tecnica di colloquio l'ho in seguito perfezionata e adottata come modello per la ricerca sulla *Robustezza degli apprendimenti*, lavoro iscritto nel programma di ricerca dell'ASP di Locarno e che dovrebbe conoscere una prima conclusione entro settembre 2005.
2. Un frutto concreto di queste riflessioni fu la pubblicazione del testo: D'Amore B., Arrigo G. (1993). Infiniti. Milano, Angeli, opera purtroppo esaurita e non ristampata, per ragioni indipendenti dalla volontà degli autori. Vista la notevole richiesta del volume, gli autori stanno pensando di uscire con un nuovo testo, che comprenda sia la parte storica sia quella didattica.

concetto matematico di infinito e a quella specificamente didattica sulle misconcezioni relative a questo concetto.

La ricerca vera e propria è stata indotta dall'esame di alcuni teoremi di Georg Cantor, che misero in crisi, oltre che lo stesso Cantor, anche il grande Dedekind.

In particolare, ci ha colpito il contenuto di una celebre e straordinaria lettera di Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), inviata da Halle il 25 giugno 1877. In questa lettera Cantor pone il seguente interrogativo:

«*Una varietà continua a p dimensioni, con p>1, può essere messa in relazione univoca*[3] *con una varietà continua ad una dimensione, in modo tale che ad un punto dell'una corrisponda un punto ed uno solo dell'altra?*».

L'importanza della domanda è intuibile se si considera un caso particolare della questione: è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e i punti di un suo lato?

Cantor confessa che lui stesso aveva cercato di dimostrare che ciò non fosse possibile, ma solo perché non si accontentava più della supposta e così diffusa evidenza! E confessa dunque di aver creduto nell'impossibilità, fino al giorno in cui dimostrò che le cose non stanno affatto così...

Visto che Dedekind ritardava (!) a dargli risposta sul quesito propostogli il 25 giugno, Cantor, dopo soli 4 giorni, e chiedendo scusa per il suo zelo, ripropone con forza l'interrogativo, dichiarando di avere necessità di ricevere il giudizio di Dedekind.

Non conosciamo la ragione che impedì a Dedekind di rispondere prontamente, ma è lecito supporre che anche costui, di fronte alla geniale dimostrazione di Cantor, non trovando errore alcuno, fosse assalito dalla stessa perplessità e dai dubbi che attanagliavano Cantor. Potrebbe anche lui aver masticato fra i denti un'affermazione del tipo «Lo vedo (perché la dimostrazione di Cantor è chiara e corretta), ma non ci credo (perché si scontra con l'intuizione geometrica)».

Quasi all'inizio della nuova lettera, Cantor scrive la famosa frase:

«*Fintanto che voi non mi avrete approvato, io non posso che dire: Lo vedo, ma non ci credo*».

Abbiamo ripreso quest'ultima citazione nel titolo del nostro lavoro (Arrigo G., D'Amore B., 1999, 2002).

La ricerca è stata suddivisa in due parti:

- «*Lo vedo, ma non ci credo...*» Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. (1999)
- «*Lo vedo, ma non ci credo...*», seconda parte: Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. (2002)

Dopo aver detto dell'interesse storico della questione, mi voglio soffermare su quello didattico, nostra preoccupazione centrale.

Perché proprio l'infinito in atto? Perché Georg Cantor?

Al di là del fascino culturale che l'infinito ha sempre emanato, la scelta nel nostro caso è stata dettata dal fatto che avevamo bisogno di lavorare su un conte-

3. Attiro l'attenzione del lettore che per «relazione univoca» a quei tempi si intendeva quel che oggi chiameremmo «corrispondenza biunivoca».

nuto matematico che sfuggisse a qualsiasi verifica intuitiva. Per esempio, studenti alle prese con le proprietà delle operazioni in **N**, possono in ogni momento appoggiarsi a un caso particolare: se la verifica si rivelasse negativa, concluderebbero subito che la proprietà, in quel contesto, non sussiste. Con l'infinito, tali verifiche non sono più possibili; anzi, sono addirittura fuorvianti. Pensiamo per esempio alle relazioni biunivoche esistenti tra l'insieme **P** dei numeri pari e **N** dei numeri naturali e tra l'insieme **D** dei numeri dispari e **N**:

$$\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{P} \qquad\qquad \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{P}$$
$$\mathrm{n} \leftrightarrow 2\cdot\mathrm{n} \qquad\qquad \mathrm{n} \leftrightarrow 2\cdot\mathrm{n}+1$$

Queste relazioni ci autorizzano ad affermare che gli insiemi **N**, **P**, **D** hanno la stessa cardinalità, ciò che, agli occhi dello studente, appare contraddittorio rispetto all'ovvia relazione **N = P** ∪ **U**.

La figura di Georg Cantor, in particolare i suoi dubbi e le sue ansie, ci riporta allo stato d'animo dei nostri studenti, allo scollamento che molto spesso avvertono esistere tra la teoria matematica – che devono studiare e riprodurre per contratto didattico – e la loro esperienza di vita, alla quale credono ciecamente.

Nel corso delle esperienze fatte con le classi, oltre che occuparci della cardinalità degli insiemi infiniti, abbiamo puntato la lente dell'indagine su due altre situazioni che ci sono parse molto significative:

- la topologia della retta geometrica;
- il concetto di limite (relativo alle successioni numeriche).

2. «Lo vedo, ma non ci credo…», prima parte

2.1. Organizzazione della raccolta dei dati

Si è lavorato su un campione di 16 classi di II e III superiore per un totale di 287 studenti, 51 dei quali (tre classi) del Canton Ticino (Svizzera) e il resto di Bologna. Nessuno di questi allievi aveva avuto precedentemente un insegnamento di Analisi.

La fase di apprendimento, per tutte le classi, è consistita nel visionamento di una videocassetta preparata dagli autori della ricerca. Successivamente, tutti gli allievi sono stati invitati a riempire un questionario.

La videocassetta proponeva tre situazioni:

2.1.1. Segmentino-segmentone

Presentazione e dimostrazione del fatto che nel piano puntuale due segmenti di diversa lunghezza sono equipotenti.

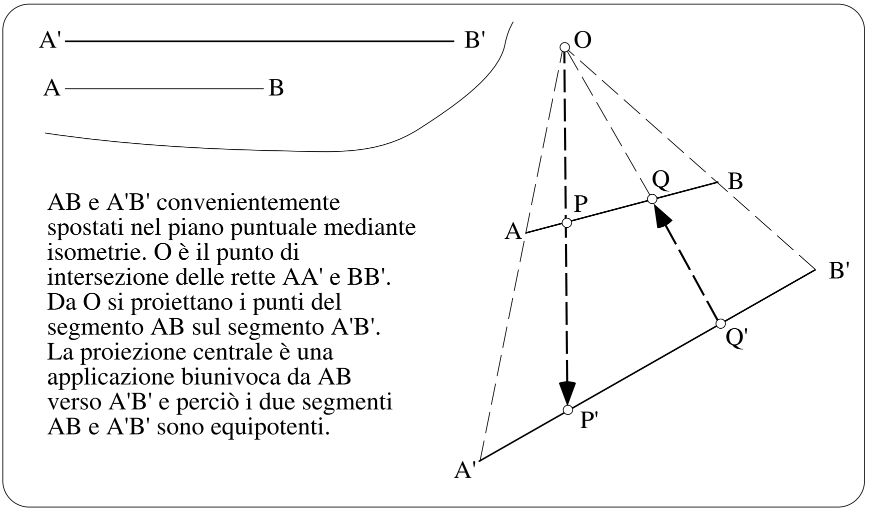


Figura 1. Dimostrazione del fatto che due segmenti qualsiasi sono equipotenti.

2.1.2. Forme decimali periodiche

Presentazione e dimostrazione del fatto che $0,3\overline{9} = 0,4$ (vedi Figura 2).

La ricerca della frazione generatrice di un numero decimale periodico faceva parte delle conoscenze in possesso di tutti gli studenti sottoposti alla prova.

$$x = 0,3\overline{9}$$

$$\left.\begin{array}{r} 100 \cdot x = 39,\overline{9} \\ 10 \cdot x = 3,\overline{9} \end{array}\right\} \quad 90 \cdot x = 36 \qquad x = 0,4$$

Figura 2. Dimostrazione che $0,3\overline{9} = 0,4$

2.1.3. Teorema di Cantor

Presentazione e dimostrazione del fatto che nel piano puntuale un quadrato è equipotente a un suo lato.

Le necessarie nozioni di geometria analitica del piano facevano parte delle conoscenze in possesso di tutti gli studenti sottoposti alla prova.

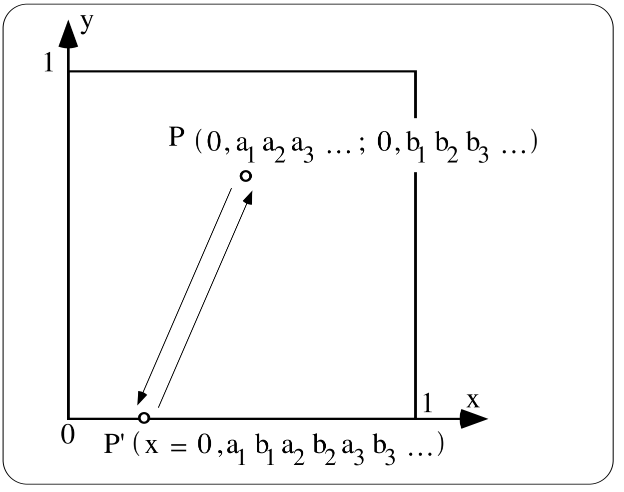


Figura 3. Dimostrazione di un caso particolare di un teorema di Cantor.

2.2. Sintesi dei risultati del test

2.2.1. Segmentino-segmentone

Soltanto il 10-12% degli studenti dice di non essere convinto della dimostrazione. Sembrerebbe quindi che una simile argomentazione sia alla portata delle capacità di comprensione della stragrande maggioranza di questi allievi.

2.2.2. Forme decimali periodiche

Ti abbiamo appena mostrato che $0,3\overline{9} = 0,4$.
Questo fatto ti convince…

per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
17,4%	**28,2%**	**24,7%**	**29,6%**

Le seguenti uguaglianze ti convincono?

	per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
$\mathbf{0,5 = \frac{1}{2}}$	**3,8%**	**1,7%**	**3,1%**	**90,9%**
	16,7%	$\mathbf{0,\overline{3} = \frac{1}{3}}$**%**	**13,6%**	**51,2%**
$\mathbf{2,7\overline{9} = 2,8}$	**18,5%**	**26,5%**	**25,1%**	**29,3%**
$\mathbf{0,\overline{9} = 1}$	**17,4%**	**24,4%**	**23,0%**	**34,1%**

Queste percentuali sono per certi versi assai inattese, soprattutto quelle delle ultime tre domande. È il primo indizio che ci fa dire come non sempre e non tutte le conoscenze matematiche (anche qualcuna giudicata elementare) si strutturino correttamente e saldamente e di conseguenza si conservino intatte per molto tempo nelle menti degli studenti. Ci stupisce in particolare il fatto che più della metà degli allievi delle superiori incontra problemi a riconoscere che $0,\overline{3}$ è **uguale** a un terzo.

2.2.3. Teorema di Cantor

Qual è (quali sono), secondo te, il punto cruciale (i punti cruciali) della dimostrazione che hai appena visto?

1) … che le coordinate dei punti del quadrato siano del tipo $0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$
12,9%

2) … che da due coordinate (ascissa; ordinata) si passi a una sola (ascissa)
44,6%

3) … che il passaggio da due coordinate a una sia stato fatto mediante una manipolazione delle cifre decimali
38,3%

Il punto cruciale della dimostrazione del teorema di Cantor si è rivelato il trattamento delle coordinate, che comporta una manipolazione delle cifre decimali. È sicuramente un'operazione nuova eseguita in una situazione mai vista dallo studente. Uno scenario estremamente instabile che ha fatto dire a gran parte degli studenti di non aver capito bene o di sospettare che sotto sotto vi sia «un trucco» e a pochi coraggiosi di non accettare la dimostrazione e quindi – mediante una disinvolta applicazione del criterio logico del terzo escluso – di affermare che il teorema è falso.

2.3. Conclusione

Nel «segmentino-segmentone» il 38% degli studenti non è riuscito a captare alcun elemento positivo dalla visione del video e di conseguenza questi soggetti hanno espresso una convinzione antecedente, in parte sorretta da immagini mentali coerenti in se stesse, ma non idonee ad affrontare la nuova situazione. Sono venute a galla le misconcezioni dell'*appiattimento* (tutti gli insiemi infiniti sono equipotenti) e della *dipendenza* (insiemi infiniti «di dimensioni più grandi» hanno forzatamente una cardinalità superiore).

Nel «teorema di Cantor» questa percentuale è salita addirittura al 66,6%.

È maturata in noi la convinzione che gli ostacoli che impediscono questo tipo di comprensione non siano tanto di natura didattica bensì di natura epistemologica.

Da questo punto di vista, i fenomeni (contraddittori) dell'appiattimento e della dipendenza sarebbero solo manifestazioni visibili dell'ostacolo profondo che andavamo cercando.

L'ostacolo epistemologico in «segmentino-segmentone» è legato al fatto che lo studente vede ancora il segmento *come una collana nella quale le perle sono i* *punti*. È evidente che una simile concezione, che non tiene conto della densità del segmento di retta (per non dire la continuità, che è cosa ancor più delicata), impedisce la corretta comprensione della dimostrazione e la conseguente accettazione del teorema. La densità ha a che fare con l'infinito attuale: il segmento puntuale è denso perché tra due suoi punti diversi scelti arbitrariamente ce ne sono infiniti altri. È difficile immaginare che uno studente non iniziato all'insegnamento dell'Analisi possa avere un'immagine della topologia dei punti della retta (quindi almeno della loro densità) che gli permetta di capire perfettamente questo fatto.

L'ostacolo epistemologico in «forme periodiche» consiste nel fatto che lo studente non riesce a capire il significato di forma decimale periodica di un numero razionale, a causa del fatto che nella forma periodica le cifre dopo la virgola rappresentano un infinito attuale.

Per questi studenti $0,\overline{9} = 0,999\ldots$ è quasi uguale a 1, ma non esattamente uguale a 1, perché «*per arrivare a 1 manca qualche cosa».*

Nel «teorema di Cantor» le cose si fanno decisamente complesse. Già la comprensione della tesi costituisce di per sé un forte ostacolo epistemologico (lo stesso che fece dire a Cantor «non ci credo»). Si tratta dell'equipotenza tra due infiniti attuali di diversa natura geometrica: l'uno, il quadrato, bidimensionale, l'altro, un suo lato, unidimensionale.

Inoltre, la dimostrazione, invece di aiutare ad aggirare l'ostacolo come nei due casi precedenti, aggiunge addirittura almeno due altri ostacoli:

- il passaggio dalla situazione geometrica iniziale alla sua algebrizzazione attraverso il metodo della geometria analitica e il conseguente ritorno all'interpretazione geometrico-topologica;
- la manipolazione delle cifre decimali, decisamente inconsueta e giudicata da molti studenti «non matematica».

Tutto ciò ci ha fatto concludere che la dimostrazione del teorema di Cantor si è rivelata al di sopra delle normali capacità di apprendimento degli studenti delle scuole superiori.

Noi ipotizziamo che gli ostacoli epistemologici riscontrati nella nostra ricerca sono tali da non poter essere eliminati nell'ambito delle conoscenze in possesso del soggetto. Per poterli superare occorre fargli varcare il confine delle sue conoscenze. Per esempio, nel caso del «segmentino-segmentone» occorre aiutare il soggetto a staccarsi dall'immagine del segmento come collana di perle chiamati punti. Quest'ultima ha origini nell'insegnamento: siamo cioè in presenza di un nuovo ostacolo di natura didattica. Ovviamente occorreva approfondire ulteriormente la questione. La stessa cosa va detta a proposito delle citate misconcezioni appiattimento e dipendenza.

3. «Lo vedo, ma non ci credo…», seconda parte

3.1. Organizzazione della raccolta dei dati

La non comprensione del teorema di Cantor, riscontrata nella prima parte della ricerca, ci ha indotto a esaminare *come* lo studente sia disposto ad accogliere la dimostrazione che esistono diverse cardinalità infinite e abbiamo pensato di ripercorrere le stesse «tappe» del lavoro precedente, mettendo però al centro dell'indagine alcuni risultati raggiunti da Georg Cantor, concernenti la cardinalità di insiemi numerici; più precisamente sono state proposte agli studenti le dimostrazioni delle seguenti affermazioni:

- Vi sono tanti multipli di 997 quanti sono i numeri naturali;
- Vi sono tanti numeri quadrati quanti sono i numeri naturali;
- Vi sono tanti numeri interi positivi, quanti sono i negativi, quanti sono gli interi nella loro totalità;
- Vi sono tanti numeri razionali quanti sono i numeri naturali;
- La potenza dell'insieme R dei numeri reali (addirittura del solo intervallo reale]0,1[) è maggiore di quella di N (e quindi anche di quella dell'insieme dei numeri razionali Q);
- Un segmento lungo 2 cm ha lo stesso numero di punti di una retta.

La non comprensione del teorema oggetto dello studio precedente è strettamente legata al problema dei modelli intuitivi (Fischbein, 1985) che gli studenti hanno degli enti geometrici e in particolare del punto; tale modello intuitivo è il risultato di un insegnamento radicato nella scuola di base (elementare e media) di entrambi i nostri Paesi e costituisce un fortissimo e apparentemente ineliminabile ostacolo didattico.

Nella prima parte della ricerca abbiamo rilevato, oltre agli ostacoli epistemologici peraltro già ampiamente evidenziati nella letteratura internazionale, la presenza di ostacoli a carattere didattico che si frappongono tra il teorema di Cantor e la sua comprensione/accettazione da parte degli studenti. In questo nuovo lavoro, abbiamo avuto un occhio particolare per gli ostacoli didattici.

Con tutti gli studenti si è sviluppato un percorso didattico che è stato affidato a ciascuno come fatto privato. Ad ogni studente, cioè, è stato consegnato un plico che, partendo dall'idea di «conteggio» di un numero finito di enti, terminasse con l'enunciazione e la dimostrazione del teorema secondo il quale vi sono più elementi in]0, 1[($\subset$ R) che non in N.

Facciamo notare qui che il testo oggetto dello studio individuale è stato all'unisono riconosciuto come «facile», «comprensibile» e simili dagli studenti sottoposti a prova.

Lo studio del plico costituente il percorso poteva avvenire in aula, alla presenza di un docente che gentilmente ci aveva messo a disposizione la classe. Durante la fase di studio non era vietato che gli studenti si scambiassero l'un l'altro impressioni ed opinioni, per fare in modo che l'opinione personale maturata dallo studio fosse rafforzata da una discussione e quindi non fosse il mero risultato di un malinteso.

Alla fine dello studio personale, allo studente è stato affidato un questionario al quale doveva rispondere, questa volta con l'obbligo di lavorare da solo e di dare quindi risposte personali.

Infine abbiamo effettuato interviste ad alcuni studenti da noi scelti.

Sono stati sottoposti allo studio e poi al test: 173 allievi del penultimo anno, dei quali 90 svizzeri ed 83 italiani; 16 allievi italiani dell'ultimo anno per un totale dunque di 189 allievi.

Di tali 189 allievi, ne sono stati intervistati 68 (36 svizzeri e 32 italiani).

3.2. Osservazioni conclusive

Affermiamo che un'educazione matematica attuale non può prescindere da alcune competenze basilari sugli insiemi infiniti.

La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito attuale richiede lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e in alcuni casi contraddittori rispetto a quelli che si usano nel finito. Ne deriva un'importante indicazione didattica: già nella scuola di base occorre iniziare un'educazione alla trattazione degli insiemi infiniti che permetta all'alunno di rendersi conto delle principali differenze che tale modo di pensare comporta rispetto all'ambito finito. Ciò va fatto sia nel campo numerico sia in quello geometrico.

Nel campo numerico occorre prima di tutto convincersi della caduta dell'assioma euclideo «il tutto è maggiore di ogni sua parte (propria)», del fatto che un insieme avente infiniti elementi può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio, delle stranezze che si ottengono quando si applicano le operazioni aritmetiche ai numeri transfiniti (cioè ai cardinali di insiemi infiniti). Per esempio, se a è un numero transfinito e k un numero naturale diverso da zero, sono espressioni corrette:

$$\alpha + \alpha = \alpha \qquad k \cdot \alpha = \alpha \qquad \alpha \cdot \alpha = \alpha \qquad \alpha^k = \alpha$$

Sarebbe pure interessante, eventualmente con studenti prossimi alla maturità, giungere alla comprensione della formula, $2^\alpha > \alpha$ anche se, almeno per gli studenti da noi coinvolti, sembrerebbe obiettivo troppo alto.

Nel campo geometrico, gli studenti osservati hanno mostrato di possedere una visione assai distorta della topologia della retta: i concetti di densità e di continuità non sono per nulla capiti, anzi l'immagine ingenua della retta come collana di perle (nella quale ogni perla rappresenta un punto geometrico) è per molti l'unico supporto alla teoria: ciò spiega senza alcun dubbio la difficoltà che gli studenti (la quasi totalità del nostro campione!) incontrano nel capire come mai i punti con ascissa razionale non riempiono la retta e come si possa asserire seriamente che in un segmento lungo 2 cm vi sono tanti punti quanti ve ne sono in una retta intera.

I risultati della presente ricerca ci hanno spinto a lanciare a tutti gli insegnanti un forte segnale di emergenza: è necessario curare i concetti relativi agli insiemi infiniti già a partire dalla scuola di base, coinvolgendo gli alunni in esperienze significative, aiutandoli a costruire immagini intuitive coerenti con la teoria degli insiemi infiniti.

Ciò non deve essere letto nel senso di un'introduzione nei programmi di nuovi contenuti. Anzi, in questo modo non si farebbe altro che ripetere l'errore che da anni si sta facendo con l'insegnamento dell'Analisi, dove si presenta una teoria parecchio formalizzata a studenti non in grado di capire perché mancanti di una sufficiente esperienza e competenza nell'ambito della trattazione degli insiemi infiniti. Un'esperienza, questa, da acquisire a partire dalla scuola di base attraverso una serie di attività, appositamente studiate, aventi lo scopo di avvicinare l'alunno alla delicata quanto affascinante problematica concernente l'infinito, aiutandolo così a formarsi immagini mentali non distorte.

Per quel che concerne l'analisi degli errori che gli studenti del nostro campione hanno commesso, *appiattimento* e *dipendenza* si sono rivelati i più importanti. Per noi queste due forme patologiche hanno un'origine comune: **l'incondizionata applicazione agli insiemi infiniti di procedure proprie degli insiemi finiti**. Questo atteggiamento è frutto di un'evidente misconcezione, generata da anni di applicazione di determinate procedure sempre e solo in ambito finito, procedure che col tempo sono diventate veri e propri modelli universali. Passando poi agli insiemi infiniti e ai numeri transfiniti, lo studente accumula nuove nozioni (arriva persino a studiare i limiti, le derivate e gli integrali), ma non riesce a farle proprie, segnatamente in quei casi (purtroppo per lui importanti) nei quali le vecchie procedure non funzionano più.

4. Il senso dell'infinito

Dato per scontato che esista qualcosa che può essere chiamato «senso del numero», ci chiediamo, se possa dichiararsi esistere qualche cosa di analogo ma riferito all'infinito, che potremmo allora chiamare «senso dell'infinito». Se tale oggetto di conoscenza matematica personale esistesse, potrebbe allora essere chiamato in causa in varie occasioni aventi a che fare con l'apprendimento del concetto di infinito. In particolare, già a partire dalla scuola di base, si potrebbero meglio curare i concetti relativi agli insiemi infiniti, e costruire attività didattiche più idonee al raggiungimento dello scopo dichiarato nel paragrafo precedente.

Questa ricerca, appena conclusa e in via di pubblicazione sulla rivista *La Matematica e la sua Didattica*, Bologna, Pitagora, è sostenuta da tre istituti:

- NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia;
- ASP (Alta Scuola Pedagogica), Locarno, Svizzera;
- Mescud (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Universidad Distrital «Francisco J. de Caldas», Bogotà, Colombia.

Ecco i principali interrogativi che stanno alla base della nuova ricerca:

1. Nel senso comune, c'è differenza tra «grandissimo» e infinito? Se sì, quale? Che relazione si pensa esista tra «infinito» e «illimitato»? Una figura geometrica limitata può possedere infiniti punti?
2. Che ruolo gioca il fenomeno dell'appiattimento? (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002). Ammesso che un soggetto abbia dimostrato di possedere il senso dell'infinito, esso vale esclusivamente per n (infinito numerabile) o anche per c (infinito continuo)? Si arriva ad avere un «senso di c». Come? Quale?

5. Epilogo

Di per sé, la ricerca sull'infinito non può finire mai. Al di là del gioco di parole, l'affermazione è da prendersi sul serio. Ciascuna delle ricerche presentate in questo mio intervento hanno dato delle risposte, ma hanno soprattutto fatto nascere nuovi e appassionanti interrogativi. Pensiamo per esempio alle immagini mentali, ai modelli e alle misconcezioni relative ai concetti che coinvolgono l'infinità in atto. Immagini che albergano non solo nella mente degli studenti, ma anche in quella dei loro insegnanti (Sbaragli, 2003), di qualsiasi ordine scolastico, dalla scuola dell'infanzia all'università. Dobbiamo preoccuparci seriamente della formazione di immagini corrette. Già, perché una misconcezione può nascere anche in tenera età. Se non è corretta in tempo, può mettere radici solidissime; se si forma nella mente dell'insegnante si trasmette facilmente a quella dei suoi allievi. Come in un'epidemia.

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo, ma non ci credo...». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, (pp. 465-494). [hIn versione inglese: «I see it but I don't believe it…». Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Belgio), XXXVI, 1, 1999, (pp. 93-120). Un ampio sunto del testo inglese appare in: Gagatsis A. (2000), *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, 7-9 january 2000, Nicosia, Cyprus, volume II, (pp. 371-383). Un altro ampio sunto del testo inglese appare in: *Proceedings of CERME1*, Osnabrück, 1998. hIn versione spagnola: «Lo veo, pero no lo creo». Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual, *Educación matemática*, Mexico DF, 11, 1, (pp. 5-24)], 1999.

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo, ma non ci credo...», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1/2002. Pitagora, Bologna, 2002.

D'Amore B., Arrigo G.
Infiniti. Milano, Angeli, 1993.

Fischbein E.
Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L., *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna, Zanichelli-UMI, 1985.

Sbaragli S.
Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* Prima parte: 26A, 2, (pp. 155-186). Seconda parte: 26A, 5. (pp. 573-588), 2003.

5. Une modélisation de l’enseignement des mathématiques[1]

Guy Brousseau

La teoria delle situazioni non è un’ideologia pedagogica, ma uno strumento che permette di analizzare i complessi rapporti che si verificano a scuola. Come tale, si presta per analizzare qualsiasi situazione d’insegnamento, effettiva o anche simulata, consente di evidenziare le scelte operate dagli insegnanti e di classificarle in relazione alle loro conseguenze. In generale è conosciuta perché può anche portare all’ideazione di «nuove» situazioni didattiche, in particolare sotto forma di giochi, ma non è questa la sua peculiarità più importante. La teoria è complessa, non può certamente risolvere tutti i problemi dell’insegnamento, è difficile da capire e soprattutto da mettere in pratica, non sempre coincide con le opinioni degli insegnanti, e purtroppo si presta a estrapolazioni azzardate che talvolta servono a «giustificare» pratiche d’insegnamento scorrette. Questo tema non può essere affrontato in modo completo nello spazio di un articolo destinato a una conferenza, ma l’intenzione dell’autore è di riuscire a dare un’idea della coerenza, della potenza e della validità di questo approccio.

Introduction

La théorie des situations n’est pas une idéologie pédagogique. Elle n’est qu’un instrument pour analyser des rapports complexes et pour débusquer les inconsistances des approches plus négligentes. Elle vise essentiellement l’analyse de n’*importe quelle* situation d’enseignement effective ou imaginée, c’est-à-dire de faire ressortir les choix du professeur et de les hiérarchiser en fonction de leurs conséquences. Les questions qu’elle permet de poser peuvent provoquer l’émergence de situations didactiques «nouvelles», en particulier sous forme de jeux, mais cela ne leur attribue aucune vertu particulière. Comme tous les objets techniques, elles ont des propriétés, bonnes ou mauvaises, et sont plus ou moins adaptées dans des circonstances réelles d’emploi.

Elle est très certainement insuffisante à tous les points de vue. Elle est très lourde et très complexe. Elle est difficile à comprendre et à manier parce qu’elle a dû vulgariser ses modélisations sous forme de métaphores. Elle ne coïncide pas souvent avec les opinions des professeurs. Elle ne leur fournit pas de baguette magique pour résoudre la plupart de leurs problèmes difficiles. Si elle n’est contredite par aucune discipline connexe (mathématiques, psychologie, sociologie, linguistique etc.), elle ne fait pas bon ménage avec les extrapolations hasardeuses que certains en tirent abusivement pour inféoder l’enseignement à leur discipline. Enfin je ne vois guère

1. L’introduction de ce texte est extraite de ma conférence à ICME 10 (juillet 2004) donnée à l’occasion de la réception du Prix Félix Klein de l’ICMI. Le reste est un texte nouveau qui résume et complète quelques textes antérieurs, sauf la partie sur les doubles jeux qui est extraite de l’article suivant: Brousseau Guy, «Les doubles jeux de l’enseignement des mathématiques», (2002), p. 83-155, *Questions éducatives, l’école et ses marges: Didactique des mathématiques*, n. 22-23 décembre 2002 Centre de recherches de l’Université Jean Monnet, Saint Etienne. Cet article comprend en annexe d’autres exemples de situations.
De plus, dans le même numéro de cette revue, plusieurs articles – notamment ceux d’Alain Denis et de Marc Derycke – apportent des éclairages très intéressants sur les questions abordées ici.

d'autre moyen d'obliger les conjectures sur l'enseignement à s'incarner en éléments à la fois observables et manipulables.

Un tel sujet ne peut pas entrer dans les limites d'un article de conférence, mais je souhaite vous donner une idée de la cohérence, de la puissance et de la validité de cette approche. C'est pourquoi vous voudrez bien me pardonner de ne traiter, dans les deux premiers points, que ce qui est indispensable pour aborder le troisième, et parallèlement, de laisser la trace du traitement de certaines questions sous forme de plans. Ces questions sont traitées dans d'autres textes, mais différemment et j'ai voulu les replacer par rapport à mon propos.

Dans la première partie nous visiterons la modélisation de l'activité mathématique par des jeux formels, en nous appuyant sur un exemple. Dans la seconde partie nous rappellerons rapidement les principales méthodes classiques d'enseignement. Dans la troisième partie nous soumettrons ces méthodes à l'analyse de situation. Nous mettrons en évidence les nécessaires double jeux des élèves et la structure du milieu de l'enseignement, enfin nous analyserons les doubles jeux du professeur et nous montrerons que le constructivisme radical et les modèles classiques sont contradictoires.

1. Le Jeu des mathématiques
La Théorie des Situations Mathématiques

1.1. L'agrandissement d'un puzzle

Prenons un exemple bien connu du genre de situations que nous construisions. Il s'agit de modéliser les situations mathématiques où intervient une proportionnalité.

Presque toutes les fonctions évoquées à l'école primaire sont des proportionnalités, et cette propriété est admise comme évidente ou est enseignée sans justification. Comment faire que des élèves choisissent la proportionnalité parmi plusieurs possibilités, et qu'ils le fassent pour des raisons mathématiques et non pas seulement empiriques.

Le professeur montre aux élèves un puzzle carré de 11 cm de côté (fig. 1) utilisable (fig. 2).

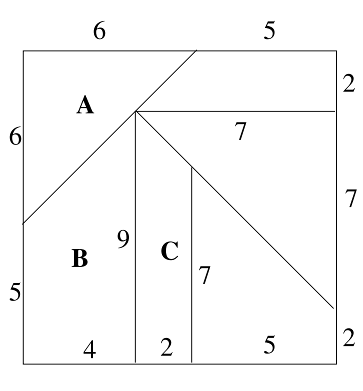


Figure 1

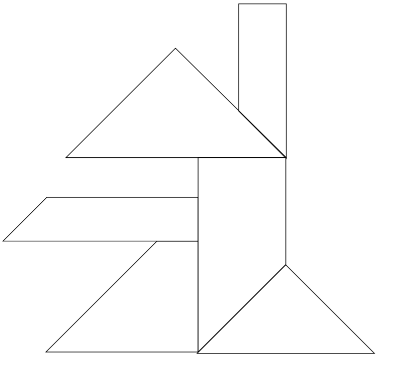


Figure 2

Il leur dit:

«Vous devez découper dans du carton un puzzle semblable à celui-ci (le modèle). Mais pour les enfants de l'école maternelle, vous devez le faire plus grand. Ce côté qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur l'image (ou reproduction). Mais il faut pouvoir faire les mêmes figures avec le grand puzzle image qu'avec le modèle».

«Pour réaliser ce grand puzzle vous allez vous mettre par groupes. Chaque groupe fera une seule pièce et vous raccorderez vos pièces ensuite».

Presque tous les groupes commencent par penser qu'il faut «ajouter 3 cm» à chaque mesure.

Désastre! Les morceaux ne se raccordent pas!

La première hypothèse c'est que le découpage n'est pas bien fait…

Après l'élimination de diverses hypothèses les élèves admettent bien la proportionnalité

«il faudrait que le côté 2 soit la moitié du côté 4». Mais si cette observation est acceptée par les élèves, elle n'est pas justifiée et elle ne donne pas de méthode de calcul (de fonction) permettant d'obtenir 7 à partir de 4.

Alors certains élèves proposent alors de doubler la longueur du modèle et d'enlever un. La méthode est «presque acceptable».

$4 \rightarrow (2 \times 4) - 1 = 7$

$6 \rightarrow (2 \times 6) - 1 = 11$

$2 \rightarrow (2 \times 2) - 1 = 3$

D'autres ont obtenu par tâtonnements des solutions «acceptables» puisqu'on peut jouer comme avec un bon puzzle.

Finalement les élèves doivent remarquer qu'il est nécessaire que **l'image de la somme de deux segments soit la somme des images de ces segments (fig. 3)**, ce qui n'est pas vrai dans les autres solutions (figure 4).

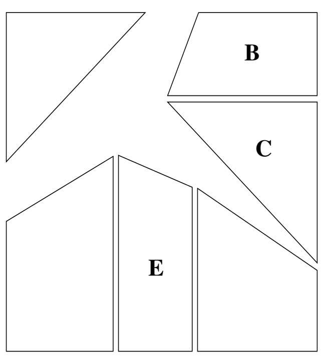


Figure 3

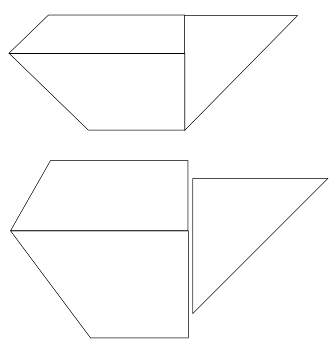


Figure 4

$2 \rightarrow 2 + 3 = 5$
$4 \rightarrow 4 + 3 = 7$
$6 \rightarrow 6 + 3 = 9$

Alors
$2 + 4 = 6$
Mais
$5 + 7 > 9$

Ils vérifieront alors que les rapports sont bien conservés. Grâce à quoi ils utiliseront la définition des fractions-mesures soit directement: 7 est les 7 quarts de 4, soit en calculant l'image de 1.

J'ai choisi cet exemple parce qu'il permet de comprendre notre méthode de travail. Les relations de l'élève avec son environnement répondent à une liste de conditions susceptibles d'assurer à l'élève la plus grande autonomie sans rien céder sur la détermination des connaissances mathématiques à mettre en œuvre. Ces conditions sont assez différentes de celles de nombreux problèmes et exercices habituellement proposés en classe.

a. La connaissance mathématique visée doit être le seul moyen de bien résoudre le problème.
b. la consigne ne doit faire appel à aucune des connaissances qu'on veut faire apparaître. Elle détermine les décisions permises et les situations initiales et finales réalisant le gain ou la perte
c. Les élèves peuvent commencer à agir avec des «connaissances de bases» inadéquates.
d. Ils peuvent constater eux-mêmes la réussite ou l'échec de leur tentative.
e. Sans déterminer la solution, ces constatations sont suggestives (elles favorisent des hypothèses, apportent des informations appropriées, ni trop fermées ni trop ouvertes).
f. Les élèves peuvent faire rapidement des tentatives successives mais l'anticipation doit être favorisée
g. Parmi les solutions empiriquement acceptables une seule peut répondre à toutes les objections.
h. Elle peut être trouvée et prouvée par quelques élèves dans un temps raisonnable dans une classe ordinaire et très vite partagée et vérifiée par les autres.
i. Elle se prête à des tentatives de réutilisation et fait poser des questions qui relancent le processus (par exemple est-ce que tous les agrandissements se font ainsi?).

…

1.2. Les situations, définies comme des jeux

Ces conditions font immédiatement penser à celles qui définissent un jeu formel.

Au départ, le joueur se trouve en présence d'un système qui se présente à lui dans un état déterminé. Ici un morceau de carton à découper. Il lui est proposé d'atteindre un état final bien déterminé: ici présenter un morceau de carton susceptible de prendre une place déterminée dans quelques figures bien déterminées. Remarquons que les formes et les tailles qu'il doit obtenir ne sont pas explicitées, mais les conditions données déterminent un résultat unique, vérifiable par l'élève. Le joueur peut modifier l'état initial et les états suivants du système suivant des règles elles aussi déterminées: tracer et découper son carton comme il veut. Les règles ne déterminent pas une procédure unique, au contraire une infinité de stratégies et de tactiques peuvent être utilisées. Mais le joueur peut faire autant de tentatives qu'il veut et les évaluer, chacune, luimême. La fonction linéaire n'est pas la seule solution pratique satisfaisante, mais c'est la seule solution intellectuellement et rationnellement satisfaisante. Cette solution n'est pas fournie directement par la culture naturelle ou didactique de l'élève: pour lui il y a incertitude sur la méthode de résolution et indétermination de la solution théorique.

Cette situation ne se réduit pas toutefois à un jeu «contre la nature» car le contrôle des décisions passe par une coopération avec d'autres élèves. Ainsi les éventuelles solutions empiriques seront soumises à une autre sorte de jeu: le jeu de la validation sociale d'une solution.

Nous voyons apparaître le procédé fondamental de la théorie des situations. Il s'agit de modéliser les *actions* d'un sujet dans un certain *environnement*, en les faisant apparaître comme des réponses appropriées, d'une part à des conditions imposées par cet environnement, et d'autre part à ses ressources matérielles ou cognitives connues.

L'objet est un ensemble complexe de relations d'un sujet avec un environnement. *Le modèle est une situation*, c'est-à-dire un jeu – au sens mathématique de ce terme – entre un actant et un milieu. Certains de ces modèles sont strictement mathématiques, d'autres non.

La modélisation peut intervenir dans deux types de recherches:

— la description des activités observées, il s'agit de choisir le minimum de conditions qui permettent d'expliquer et de prévoir les comportements
— la détermination des conditions minimales qui rendent nécessaire l'usage et éventuellement l'invention ou l'apprentissage d'une connaissance donnée. Nous avons conjugué ces deux types de recherches sur l'étude de l'activité mathématique.

La situation du puzzle illustre bien le deuxième type[2].

Il est nécessaire d'insister toutefois sur le fait que les situations mathématiques dont nous parlons ici sont celles dont la solution peut être trouvée ou apprise par les élèves de façon autonome. Toutes les activités mathématiques qui se déroulent en classe et dont la solution requiert à un moment ou à un autre une intervention informative de la part du professeur, constituent une classe à part: les «situations didactiques en mathématiques».

Notre observation soulève au moins trois questions:

a. Toutes les connaissances mathématiques peuvent-elles être modélisées par des situations? Oui car les exercices et les problèmes sont des théorèmes et des situations simplifiées. Ces situations classiques présentent des caractéristiques «appauvries» par rapport aux situations mathématiques réelles. Elles se réfèrent à une épistémologie adaptée à la didactique classique mais très éloignée des situations mathématiques effectives. Mais existe-t-il un modèle général pour les situations mathématiques? Existe-t-il au moins un modèle pour chaque branche ou pour chaque secteurs des connaissances mathématiques?
b. L'ingénierie didactique cherche donc à créer des situations intégrant mieux des conditions plus favorables et plus «essentielles». Toutes les circonstances nécessaires à l'apparition d'une connaissance mathématique doivent-elles et peuvent-elles entrer dans ces modèles?

2. En mathématiques un objet O peut être déterminé par un prédicat R telle que R(O) est une proposition vraie. De même un objet mathématique peut être déterminé par une situation S telle que S(O) est résolu. Il faut bien distinguer le modèle mathématique du jeu (dans le cas du Puzzle il n'est pas formalisé) et les connaissances mathématiques solutions du jeu (ici la linéarité).

Il existe a priori différentes sortes de connaissances suivant les différentes fonctions qu'elles peuvent tenir. Les «connaissances en actes» et les répertoires de schèmes ont pour fonction de produire des décisions et des actions. Comme les messages et les langages et comme les «théorèmes» et les preuves. Elles appellent des types de situations distincts: situations d'action, de formulation, de preuve. Nous avions remarqué qu'il leur correspond aussi des modes d'apprentissages différents (ex. ceux de Bateson). Nous retrouvons ces types de situations comme phases successives dans le déroulement de la leçon sur le puzzle.

c. Les types de situations permettent de mieux faire jouer certaines circonstances utiles à l'apprentissage. Ces circonstances ne sont pas indépendantes des connaissances en jeu. Quelle est l'importance des conditions spécifiques à chaque connaissance? Cette question est importante pour l'organisation de l'enseignement: existe-t-il un modèle de situation utilisable pour toutes les connaissances?
Par exemple quel rapport l'agrandissement du puzzle a-t-il avec l'apprentissage de la similitude en géométrie?

1.3. L'activité mathématique

Revenons sur cette situation du puzzle. Il existe une infinité de solutions «pratiques», approximatives ou même «mathématiquement correctes», qui n'exigent pas la compréhension effective et l'explicitation de la linéarité de la fonction. Par exemple le découpage «à l'œil», ou l'usage d'un abaque (figures 5 et 6) pour déterminer automatiquement la taille des côtés.

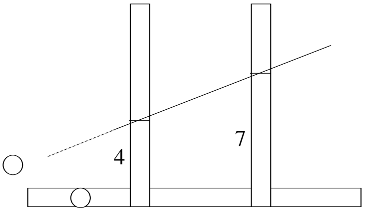


Figure 5

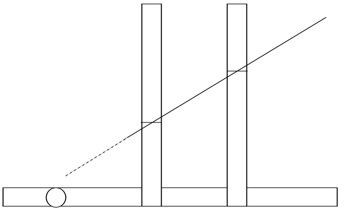


Figure 6

Mais les mathématiques ne consistent pas seulement à «résoudre le problème» de façon adéquate, elles résident essentiellement dans l'étude de la consistance, (c'est-à-dire la cohérence, la non contradiction) de la solution. L'invention de l'abaque suppose une réflexion et une culture beaucoup plus complexe et sophistiquée que la condition de linéarité. On ne peut pas s'attendre à la voir surgir de la situation du puzzle.

Le dédoublement entre la situation d'action et celle de la preuve est essentiel, consubstantiel aux mathématiques. En ce sens la situation du puzzle qui présente les deux aspects, la nécessité d'efficacité spatiale et la preuve de la validité rationnelle des solutions, préfigure convenablement les situations géométriques que les élèves rencontreront plus tard.

La situation fondamentale de la *connaissance de l'espace* est bien représentée par celle du charpentier: Il doit tailler au sol (dans un plan) des pièces de bois coûteuses qui devront s'ajuster exactement dans l'espace. Cette activité réclame des «connaissances» et des représentations de toutes sortes.

La *géométrie* n'est pas une sorte de reformulation théorique des connaissances du charpentier, elle est *l'étude de la non contradiction de ses connaissances sur l'espace*. C'est un jeu tout différent

Pour bien montrer cette différence aux élèves débutants voici la situation (didactique) «des trois centres du cercle circonscrit» que l'on peut utiliser pour leur expliquer la nature de la géométrie.

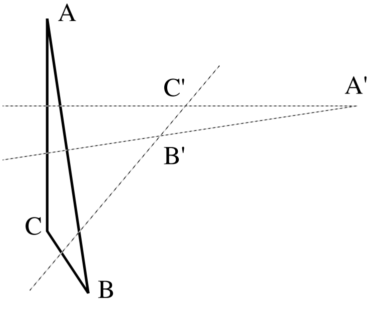


Figure 7

Le professeur demande «sérieusement» à ses élèves débutants de tracer les trois médiatrices d'un petit triangle ABC très aplati, et prétend donner des noms appropriés A' B' C' aux sommets du petit «co-triangle» qu'ils «doivent» ainsi obtenir. Devant la trop petite taille de ce triangle le professeur prétend avoir choisi un triangle ABC particulier et incommode. Il demande alors aux élèves de trouver un triangle dont le co-triangle sera le plus grand possible. Les élèves s'acharnent. Ils doivent finalement émettre l'hypothèse que ces trois points pourraient n'en représenter qu'un seul et en apporter la preuve contre «l'évidence» de la figure et non pas avec. Pour cela il faut s'accorder sur la définition de la médiatrice comme lieu.

Le professeur explique alors la différence entre «voir» et «démontrer». La géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui «doit» être vu.

Cette relation entre une situation d'action avec ses nécessités pragmatiques et économiques et une situation de preuve, avec ses nécessités purement logiques, se retrouve dans toutes les mathématiques. Les exemples de couples de ce type sont très nombreux. Par exemple, la logique construite (mathématique ou non) et la logique du constructeur, les probabilités sont essentiellement un moyen – mathématique – de justifier une certaine pratique des statistiques par l'étude de leurs comportements limites, elles ne sont pas une sorte de physique de l'aléatoire. La statistique elle-même en tant que partie de la théorie de la mesure relève des mathématiques.

La théorie des situations mathématiques permet l'utilisation systématique de ce dédoublement propre aux mathématiques aussi bien dans le domaine de l'arithmétique que de l'algèbre.

1.4. La théorie des situations mathématiques

Les situations mathématiques réelles sont généralement complexes, mais composées de 4 types de situations «élémentaires»: des *situations d'actions* dans lesquelles l'actant est confronté à un milieu dénué d'intentionnalité, des *situations de formulation* dans lesquelles l'actant coopère (réellement ou non) avec un interlocuteur pour résoudre une situation d'action, des *situations de validation* dans lesquelles des actants s'affrontent et coopèrent pour établir la validité d'une déclaration, enfin des *situations d'institutionnalisation* où divers actants s'accordent sur un répertoire de référence.

En s'appuyant sur des analyses plus précises de l'ergonomie des solutions classiques, ces modélisations ont conduit à s'interroger sur l'introduction des principales notions de mathématiques élémentaires et à proposer des solutions souvent très différentes et d'une meilleure efficacité.

La modélisation des activités humaines par des jeux, formels ou non, n'est pas une idée nouvelle[3]. Ce sont surtout Morgenstern et Von Neumann, qui en étudiant la modélisation des comportements économiques, ont donné un grand développement mathématique à cette idée. Johan Huizinga[4] a soutenu[5] que le jeu est un facteur fondamental de tout ce qui se produit au monde, au point qu'il a proposé de substituer au nom d'homo sapiens et d'homo faber celui d'homo ludens.

Il est intéressant de mettre en parallèle les approches mathématiques de l'économie et de la didactique qui se réclament de la même théorie. L'économie est définie par Malinvaud comme la science qui étudie comment des ressources rares sont employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société. J'interprète la didactique des mathématiques comme la science des conditions de la diffusion des connaissances mathématiques utiles aux affaires des hommes et de leurs sociétés.

La production et l'usage des mathématiques est assez bien représentée par la théorie des situations mathématiques. En acceptant sans trop de réflexion l'idée que la connaissance des processus d'apprentissages était l'instrument essentiel de l'organisation d'un bon enseignement, j'ai cru pendant un certain temps que cette théorisation serait suffisante pour permettre de comprendre et d'améliorer l'enseignement des mathématiques. Il suffirait que l'enseignant propose des situations mathématiques telles que celles que je viens de décrire. On pourrait les appeler «situations d'auto-apprentissage». Les élèves construiraient eux-mêmes la connaissance. Cette hypothèse a été développée sous le nom de «constructivisme radical» notamment par Von Glasersfeld. Elle a conduit à considérer que l'enseignement était une sorte d'application des connaissances de psychologie.

Nous allons voir comment la modélisation de cette activité humaine en termes de jeux nous a conduits à développer une *théorie des situations didactiques en mathématiques* à laquelle la *théorie des situations mathématiques* primitive a dû être adaptée.

3. Bachelier, théorie de la spéculation 1900, théorie mathématique des jeux 1901 puis Poincaré.
4. Grand historien néerlandais 1872-1945.
5. Johan Huizinga «homo ludens» essai sur la fonction sociale du jeu (1938) Tel Gallimard 1951.

2. Les conceptions didactiques

Nous ne faisons ici qu’un rapide rappel de quelques conceptions didactiques en les réorganisant pour soutenir notre propos.

2.1. Les conceptions classiques de la didactique

Le *modèle minimal* de l’enseignement ne considère que deux systèmes en interaction: le professeur et l’élève. Le premier communique au second le texte d’un savoir établi et justifié par ailleurs. Certains envisagent un triangle: «professeur, élève, savoir». Mais le savoir n’est pas un actant, il joue le rôle d’un répertoire, différent pour chaque actant. Pourtant le professeur, comme le mathématicien d’ailleurs, réorganise le savoir en fonction de certaines conditions liées à la situation de communication didactique. Par exemple le souci de ne pas faire appel à des savoirs non encore enseignés le conduit à une organisation du discours didactique de forme axiomatique. Le souci de maintenir un niveau de difficultés et un débit d’information acceptables le conduit à prévoir des lemmes ou éviter les répétitions ou à utiliser des ellipses. De cette sorte autant qu’un répertoire, le savoir apparaît dans ce modèle comme le *milieu* de la relation didactique, et non pas seulement comme l’objet d’une communication

Ce modèle a été justement critiqué et complété, au nom de l’activité propre et effective du sujet. La *maïeutique socratique* réserve au professeur le soin de poser des questions et l’élève doit y répondre. Le choix et l’organisation des questions propres à faire produire par l’élève des réponses «originales», pour lui, ont conduit au développement de toutes sortes de problèmes spécifiques attachés à chaque connaissance mathématique.

La modélisation de l’activité mathématique par des problèmes et des exercices est très ancienne et figure plus ou moins dans toutes les conceptions didactiques classiques. Georges Glaeser insistait sur les différences de propriétés entre problèmes et exercices et il donnait comme indice pour distinguer ces deux formes de situations autonomes, la difficulté de résolution (l’exercice est facile et reproductif, le problème est difficile et original pour l’élève). On peut distinguer les situations correspondantes par la fonction qu’elles leur assignent. Le problème, facile ou difficile est une situation d’action, le but de l’élève est de résoudre. Le but principal de l’exercice est de changer le statut de certaines connaissances, de moyens opportuns dans des cas rares, elles doivent devenir méthodes familières. L’étude de l’utilisation des problèmes a fait l’objet de développements récents sous l’impulsion de Polya (problem solving methods).

L’introduction de l’activité de l’élève pose le problème du partage des responsabilités dans le déroulement et le résultat des séquences d’enseignement. Suivant que le contrat didactique rejette la responsabilité de l’apprentissage totalement sur l’élève considéré comme un récepteur libre, ou sur le professeur, considéré à l’opposé comme un professionnel qui doit produire des élèves éduqués avec une fiabilité industrielle, suivant la place que l’on accorde à l’activité de l’élève, etc. on obtient différents «contrats didactiques» et différentes méthodes que nous énumérons dans le tableau ci-après.

a. Les différents «contrats didactiques»[6]

Ils fixent la nature et la répartition des enjeux de la relation entre l'émetteur et le récepteur des connaissances

Contrats faiblement didactiques (voir plus loin):

Diffusion de connaissances sans intention didactique

— Contrat d'émission
— Contrat de communication
— Contrat d'expertise
— Contrat de production
— Contrats d'information (dialectiques, dogmatiques, axiomatiques)
— Contrat d'utilisation des connaissances
— Contrat d'initiation et de contrôle
— Contrat d'instruction et de direction d'études

Contrats fortement didactique (voir plus loin)

— Contrat de familiarisation
— Contrat d'ostension
— Contrat de conditionnement (behaviorisme)
— maïeutique socratique
— contrat d'apprentissage empiriste
— contrats constructivistes
— contrat de reprise des savoirs anciens

La pratique classique et réelle de l'enseignement, prenant en compte le plus grand nombre possible d'objections, a multiplié et conjugué à plaisir les formes didactiques: exposés, reproduction de textes, questions d'analyse ou de synthèse, problèmes, exercices, etc.

2.2. Les modèles constructivistes

Mais la résolution de problèmes étant souvent présentée comme le meilleur modèle de l'activité mathématique, et comme la preuve de l'acquisition des connaissances, on a vu se développer des théories où elle peut remplacer l'exposé des connaissances. Ce sont les *théories constructivistes.* L'élève construit sa propre connaissance par son activité. Le *constructivisme radical* postule de plus que les seules connaissances acquises ne le sont que par une activité autonome. En s'appuyant sur ce principe le constructivisme radical a banni toutes sortes de pratiques didactiques comme les exposés dits «dogmatiques» et même toutes sortes d'interventions du professeurs: les problèmes doivent être «ouverts» pour le professeur, et même les questions sont parfois rejetées. Ce *constructivisme radical* est en fait une idéologie didactique nihiliste dont il faut montrer les contradictions: montrer ses échecs ne suffirait pas car alors la responsabilité resterait sur les épaules du professeur. L'analyse en termes de jeu permet cette étude par deux voies concourantes.

6. Ref. Cours n. 2 Ecole d'été 1995 et «Théorie des situations didactiques» à paraître.

D'une part, la modélisation de l'activité mathématique des élèves, conduit à objectiver cet idéal que poursuit en principe le constructivisme. La théorie des situations mathématiques[7] postule que chaque connaissance mathématique possède des situations et des processus génétiques fondamentaux et l'ingénierie a abondamment illustré ce postulat. Il semble commode dans ces circonstances d'envisager l'enseignement sous la forme radicale suivante: le professeur propose à l'élève des situations qui provoquent et permettent un auto apprentissage des notions mathématiques, leur formulation, leur démonstration et leur institutionnalisation et se contente de gérer les aspects périphériques, matériels, psychoaffectifs ou autres sans intervenir directement dans la construction des connaissances de l'élève. Le lecteur curieux trouvera[6] une description détaillée de l'organisation didactique dans ce cas là. Le mouvement constructiviste s'est nourri de ce point de vue

Mais les mêmes méthodes ont conduit à prolonger cette première modélisation par la théorie des situations didactiques en mathématiques qui permet de considérer objectivement les rapports du professeur avec le système composé de l'élève et de son milieu (problème classique ou non).

2.3. Les doubles jeux de l'élève

Il faut d'abord aller plus loin dans l'analyse de la situation de l'élève

a) Actant et Joueur

L'actant accepte la règle du jeu et cherche à gagner suivant cette règle, le joueur lui recherche à travers le jeu un plaisir non nécessairement défini par les règles du jeu. Par exemple dans la phase initiale du «qui dira 20» on voit des élèves qui ont la possibilité de gagner pour la quatrième fois consécutive, perdre volontairement pour éviter que leur partenaire ne se décourage et refuse de continuer à jouer. Ainsi chez ces enfants, l'actant cède le pas au joueur... qui est évidement la même personne. Autre exemple, beaucoup de joueurs s'intéressent plus à l'incertitude du jeu qu'au gain: s'ils découvrent une martingale ou une stratégie décisive, ils sont satisfaits mais aussi déçus et ils cessent de jouer, de même s'il y a une explication, elle leur gâche le plaisir en «tuant le jeu». Certains enfants jouent l'ignorance pour continuer à vivre dans une confortable incertitude etc. A propos d'une même situation le joueur et l'actant jouent en même temps à deux jeux différents qui se contrarient souvent.

b) Actant et Apprenant

Si, dans une situation l'actant a échoué, l'apprenant cherche des alternatives et tente de modifier son répertoire pour une nouvelle action. Le choix entre persister avec le même répertoire (agir) ou changer de répertoire (apprendre) est toujours le lieu d'un antagonisme douloureux. C'est la raison pour laquelle certains élèves répugnent souvent à entrer dans un jeu «auto-éducatif»: ils savent qu'il leur faudra engager des façons de connaître qu'il faudra abandonner par la suite. Certains enfants détestent cette expérience. Apprendre exige un certain détachement de l'action en cours, c'est au fond un autre jeu. Choisir d'apprendre c'est perdre l'innocence de l'enfance de l'art...

7. Guy Brousseau «le contrat didactique, le milieu» in RDM, Vol. 9/3 pp. 110-112. La pensée Sauvage.

c) Apprenant et élève

Si l'actant ne voit aucune alternative à ses décisions, on serait tenté de penser que l'apprenant a tout intérêt à chercher ailleurs la connaissance qui lui a manqué; c'est-à-dire de disqualifier l'actant dans sa démarche empirique autonome (de cesser le jeu de l'actant) et se faire «élève» de quelqu'un qui sait. On voit souvent des enfants qui, très jeunes, s'acharnent à la tâche et refusent systématiquement d'être aidés même après plusieurs échecs, puis qui, moins jeunes (après une scolarisation par exemple), deviennent des consommateurs effrénés de solutions toutes faites: «apprends moi!» et qui enfin renoncent à tout effort d'apprentissage: «ne m'enseigne pas... dis moi ce qu'il faut faire!».

d) Actant et Elève

L'action effective est coûteuse pour tout le monde, pour l'enseignant qui met en place la règle ouverte, et les moyens matériels, cognitifs et affectifs etc. de la jouer, et pour l'élève qui doit investir un concret inconnu, complexe, souvent peu attractif, peu fertile en expériences exaltantes, peu rentable en compréhension et en apprentissages et finalement même pas propre à être retenu comme paradigme d'une connaissance clairement identifiée. L'action insignifiante, l'action pour l'idéologie pédagogique de l'action est pire. En tout cas le va et vient entre le jeu de l'actant et le jeu de l'élève est le moteur toujours instable et essentiel de la relation didactique.

e) Le jeu didactique: un jeu avec des jeux

Le passage d'un jeu à l'autre est indispensable: convertir des savoirs en connaissances et en décisions dans l'action est aussi nécessaire que la transformation inverse de l'action à la connaissance, puis à la «compréhension», et au savoir... et aussi difficile ou plutôt comporte des risques de toutes sortes: il n'y a pas de voie assurée, pas de voie royale.

Reproduire une décision dans des conditions qui paraissent similaires entraîne le risque d'échec lorsque les circonstance diffèrent par des variables insoupçonnées; conserver la mémoire de «toutes» les circonstances fera qu'on ne retrouvera pas de situation identique et que l'exploration d'une nouvelle situation sera trop coûteuse; se satisfaire d'une représentation approximative ou d'un modèle hardi et le risque d'échec «s'opposera» à l'économie recherchée... S'exercer facilite l'action mais peut rendre difficile une autre adaptation; comprendre économise des exercices mais ne les remplace pas entièrement et peut même en cas d'échec compliquer l'action; se faire enseigner économise des expériences mais peut contrarier sévèrement les capacité d'adaptation etc. Et, ainsi, chaque avantage a son inconvénient et chaque jeu son aide et son antagoniste entre lesquels les équilibres sont difficiles et instables.

Dans une situation une stratégie paraît avantageuse, l'actant l'utilise... l'apprenant doit-il alors prendre le relais de l'actant et «apprendre» cette stratégie, c'est-à-dire modifier son répertoire de connaissances pour rendre cette stratégie plus disponible ou plus facile dans une action future?

On serait tenté de dire «oui». Mais, si l'élève-actant résout le problème qui lui est proposé avec ses connaissances actuelles, il semble qu'il n'ait pas besoin d'apprendre de connaissance nouvelle au risque de surcharger son répertoire de considérations superflues ou même fausses.

Certes il faut «apprendre ce que l'on sait» mais jusqu'à quel point?

Les idées exposées dans ce paragraphe ont été souvent sinon traitées, du moins exemplifiées dans de nombreux travaux de didactique des mathématiques.

2.4. La structure des situations didactiques

Il s'agit donc maintenant d'observer les jeux du professeur et de son environnement. Une analyse superficielle pourrait conduire à n'envisager que deux systèmes en interaction, le professeur et l'élève. Les méthodes utilisées dans l'analyse des situations mathématiques conduisent à considérer le milieu comme un élément essentiel de l'action des partenaires en présence, et à considérer les connaissances et les savoirs du point de vue de chaque actant. En fait l'utilisation des jeux comme modèle conduit à décomposer une relation complexe en autant de jeux élémentaires qu'il y a d'objectifs différents, quitte à les recombiner en les subordonnant les uns aux autres ensuite.

Par exemple le sujet agissant sur un milieu qu'il considère comme dénué d'intention didactique (non didactique) dans le cadre d'une situation bien déterminée, n'a pas l'intention d'apprendre. Il n'a aucune raison de supposer que ce qu'il aura été amené à faire pour atteindre son but possède une quelconque bonne propriété pour d'autres circonstances. Au mieux il gardera en mémoire une certaine trace de certaines circonstances et de certaines de ses réponses, sans que cela modifie en rien ses comportements futurs dans la plus grande partie des cas.

Diverses circonstances peuvent l'amener à penser au contraire que cette trace présente un intérêt primordial, mais que sa mémorisation réclame et mérite une activité spécifique. Le but de l'actant est maintenant tout différent, même si les circonstances paraissent les mêmes. La modélisation du jeu de ce sujet apprenant est toute différente de celle du sujet actant précédent.

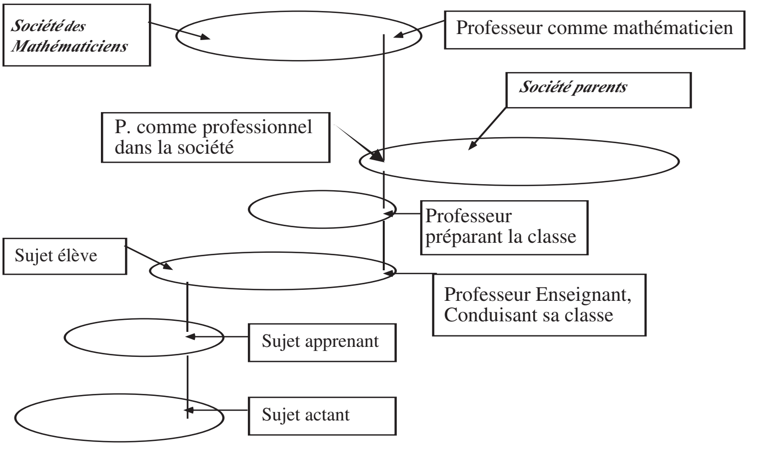
Il est même très important de distinguer les situations *autodidactiques* où l'actant – l'*apprenant* – apprend volontairement mais de façon autonome une connaissance plus ou moins personnelle, et des situations «*hétérodidactiques*» où l'actant – *l'élève* – s'assujettit à l'intention du professeur de lui apprendre un savoir culturel.

De sorte que nous retrouvons les trois types de situations que le professeur doit organiser et conduire pour ses élèves: situations d'action autonome, d'apprentissage autonome ou d'enseignement proprement dit.

Mais de son côté le professeur s'assujettit lui-même à différentes institutions dans des jeux différents et spécifiques: l'enseignement – l'action d'enseigner dans un rapport direct avec le ou les élèves – est un jeu tout différent de la préparation ou de l'évaluation de cette action. Le jeu social du professeur, pour favoriser sa position et son travail, son assujettissement aux mathématiques, son assujettissement au milieu des mathématiciens… peuvent donner lieu à des modélisations distinctes mais non indépendantes.

Le schéma ci-dessous montre les institutions différentes auxquelles il doit s'assujettir. Elles définiront autant de jeux distincts qui structurent le milieu de l'enseignement[8]:

b. Structure des modèles: les assujettissements



Il suffirait maintenant de préciser

— comment ce réseau de situations concourt à l'acquisition de connaissances et de pratiques par l'élève, quelles sont les subordinations entre les différentes situations
— quelles règles d'action et quels buts se donnent les différents actants dans chacune de ces situations et comment ils s'y partagent les responsabilités et les moyens d'action.

Mais avant et après avoir été un actant ou un apprenant autonome, le sujet doit être un élève. Il doit entrer dans un rapport didactique spécifique avec son professeur. L'étude de la répartition des responsabilités techniques (spécifiques du contenu), entre l'enseignant et l'apprenant permet de distinguer toute une série de «jeux» didactiques. Les situations «faiblement didactiques» (cours magistraux, exercices) peuvent se dérouler de façon régulière, c'est-à-dire avec des règles qui restent fixes tout au long de l'activité d'enseignement. Mais la mise en place de jeux dans le cadre de situations «fortement didactiques» (où le professeur prend à sa charge l'apprentissage effectif d'un élève précis), soulève des difficultés qui relèvent de modèles différents des précédents. Dès qu'il s'agit d'articuler l'action autonome du sujet avec la dépendance incontournable de l'élève, dans un rapport qui renvoie au professeur une certaine obligation de résultats, des contradictions apparaissent. L'enseignement se mue en une sorte de négociation autour de supposés contrats, jamais explicitables, mais toujours nécessaires et jamais tenus. Les modèles de jeux sont alors très différents, ils comprennent une part non négligeable de «ruse» de pari, de bluff, et finalement de «théâtre». L'étude du «contrat

8. Voir note 6, pp. 309-336.

didactique» sera esquissée dans le deuxième paragraphe. Nous les signalons comme des doubles jeux parce que les situations paradoxales naissent de la conjonction d'assujettissements: l'actant et l'élève, l'actant et l'apprenti, l'apprenti et l'élève, suivant les moments, coopèrent ou sont concurrents, le professeur est assujetti à son rapport aux élèves, mais aussi à la société et à la communauté des mathématiciens. Le jeu avec chacun d'entre eux peut être «simple», mais les combinaisons ne sont pas nécessairement exemptes de contradictions. Ce qui conduit à des évolutions dialectiques où les situations les plus simples ne peuvent plus être jouées.

3. Les «doubles jeux» du professeur La Théorie des situations didactiques en mathématiques

3.1. La dévolution

Envisager l'enseignement comme la dévolution par le professeur à l'élève d'une situation d'apprentissage a permis de repérer certains phénomènes. La tentative de modéliser cette dévolution comme la négociation d'un «contrat» permet de les expliquer en grande partie et d'en prévoir d'autres.

L'aboutissement de cette démarche fera considérer le maître comme un joueur face à un système formé lui-même d'un couple de systèmes: l'élève et, disons pour l'instant, un «milieu» dénué d'intentions didactiques à l'égard de l'élève (même s'il est porteur des intentions didactiques du professeur).

Dans le «jeu» de l'élève avec le milieu, les connaissances sont les moyens d'appréhender les règles et les stratégies de base – celles qui sont nécessaires pour comprendre les règles –, puis des moyens d'élaborer des stratégies gagnantes et d'obtenir le résultat cherché.

Dans le jeu du maître avec le système élève-milieu nous avons évoqué ce qu'il doit faire pour établir les règles et stratégies de base ainsi que les adaptations aux changements prévus de jeux de l'élève au fur et à mesure de son apprentissage. Nous avons vu qu'à chaque connaissance, et peut-être à chaque fonction d'une connaissance, doivent correspondre des situations (des problèmes) spécifiques et probablement des contrats didactiques. L'évolution des joueurs et du jeu – à l'encontre des jeux à règles fixes – conduit à des remises en causes des connaissances et du contrat didactique.

L'approche fournie par la théorie des situations met ce processus à la base même de la constitution des savoirs et permet de modéliser la façon dont ils articulent le spécifique et le général.

La reconstruction du savoir en situations didactiques conduit à divers paradoxes, à des contradictions apparentes. Il n'est pas lieu ici de développer cette modélisation, connue des spécialistes, mais la mise à l'épreuve de sa *cohérence* présente de l'intérêt: elle a permis de *préciser* les fonctions ou les relations qu'il convient de représenter par des règles dans les différents jeux et les difficultés de l'entreprise de modélisation du partage des responsabilités entre le professeur et l'élève et plus généralement entre le «décideur» et «l'exécutant» des «tâches» d'éducation.

La dévolution n'est pas une espèce de préparation psychologique de l'élève pour le rendre plus coopératif. Nous avons vu que l'élève devait être coopératif, mais que l'apprenant et l'actant devaient «s'opposer» à certaines intrusions du professeur dans la mesure où ils en sentaient la nécessité. Un exemple fera comprendre les rudiments de l'ingénierie de dévolution.

3.2. Le paradoxe de la dévolution des situations.

a. L'enseignant a accepté de la société la mission de faire apprendre les mathématiques à ses élèves. Or personne ne sait comment on «fait» des mathématiques et encore moins comment on fait faire des mathématiques à quelqu'un.

Lucienne Félix me racontait que Lebesgue acceptait de se hasarder à «faire des mathématiques» devant ses élèves, c'est-à-dire à improviser des démonstrations au risque de plonger dans des calculs inutilement compliqués, mais qu'il refusait de diriger un thésard, au motif que s'il lui posait des questions que lui Lebesgue savait résoudre, l'étudiant n'aurait aucun mérite, et qu'au contraire ce serait un bien mauvais cadeau de lui poser des questions que lui même ne savait pas résoudre.

L'enseignant doit obtenir *in fine* que l'élève résolve les problèmes qu'on lui propose, afin de constater et de pouvoir faire constater qu'il a accompli sa propre tâche d'enseignant.

Mais si l'élève «copie» à ce moment sa réponse, c'est-à-dire s'il la produit sans avoir à faire lui-même aucun des choix qui caractérisent le savoir convenable, et qui différencient ce savoir de connaissances insuffisantes, l'indice d'apprentissage est faussé, l'élève semble avoir appris, mais n'a pas exercé de connaissance:

L'élève doit pouvoir jouer seul et non pas simplement reproduire un algorithme ou exécuter une tâche complètement dictée[9]. Ceci se produit en particulier dans le cas où le professeur est conduit à dire à l'élève *comment* résoudre le problème posé ou quelle réponse donner; l'élève n'ayant alors à effectuer ni choix, ni essais de méthodes mais seulement à exécuter un ordre. Il n'a pas donné la preuve attendue de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion.

L'alternative est claire, ou le professeur ne dit pas quelle réponse il attend de l'élève ou bien il ne peut pas vérifier l'apprentissage. Il est évident qu'au cours d'une évaluation finale l'élève ne doit pas «copier», mais il est difficile d'y distinguer une réponse directe apprise (bas niveau taxonomique) d'une réponse produite par l'exercice d'une connaissance plus générale ou plus profonde (haut niveau taxonomique).

b. Mais le paradoxe s'étend à l'apprentissage lui même. Le professeur ne peut pas se contenter de rechercher la simple mémorisation d'un texte, ni l'apprentissage d'une collection de questions et de leurs réponses. Qu'en est il au moment d'une situation d'apprentissage par adaptation?

Pour que l'élève ait une chance de s'adapter à la situation, par une modification adéquate et spontanée de ses propres connaissances ou de ses convictions, pour qu'il doive produire la connaissance attendue de son propre mouvement, le professeur ne peut pas lui fournir la réponse. S'il le fait, quelle que soit la raison, l'occa-

9. Miller et Chomski ont montré que l'apprentissage d'une langue naturelle ne peut pas être le fait d'un «stimulus response model» mais nécessite au moins un automate fini. Ce résultat peut être considéré comme le premier de la T. S. D. M.

sion de l'adaptation personnelle est perdue et l'acquisition de la connaissance visée devra se produire dans une nouvelle tentative ou selon un autre processus. Les façons plus ou moins cachées de réduire l'incertitude des élèves ou de fournir la réponse aux élèves sont connues comme «effet Topaze», «effet Jourdain», «abus de l'analogie», etc. qui ne sont pas le plus souvent des «erreurs» didactiques, mais qui mettent fin à la tentative d'apprentissage par adaptation.

Toutes les situations d'apprentissage effectives, du conditionnement le plus étroit aux «découvertes» les plus inattendues supposent la dévolution d'une situation plus ou moins ouverte. Les caractères essentiels de ces situations sont les mêmes que ceux des jeux et s'analysent par les mêmes moyens.

Le professeur se trouve devant une alternative

— s'il dit directement à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, l'élève n'a pas besoin d'apporter d'autre connaissance que celle du «comment faire» et doit donc l'avoir appris avant. Il n'a aucune chance de s'exercer à chercher ce qu'il convient de faire, ni par conséquent d'apprendre à recherche la moindre alternative.
— s'il ne veut pas dire directement à l'élève la réponse attendue ou ce qu'il veut qu'il fasse pour résoudre le problème posé, il prend le risque ne réponde rien et ne fasse rien non plus.

Le professeur doit donc dissimuler ce qu'il veut sous un artefact didactique: choisir des questions dont les réponses peuvent être construites par l'élève, utiliser des analogies, suggérer des méthodes etc.

Le professeur, à la fois

— désire que les élèves donnent les réponses qu'il leur enseigne parce que c'est son métier
— mais en même temps que les élèves donnent cette réponse par eux-mêmes, en raison de l'adéquation de la réponse à la question et non pas parce que c'est le désir ou la connaissance du maître

Cette alternative a pris en philosophie[10] la forme suivante: si un sujet veut être aimé par un autre sujet, il ne peut pas dire quelles manifestations d'amour il en attend comme preuve. S'il le fait, les manifestations obtenues lui apparaîtront comme la production d'un individu assujetti par quelque contrainte et non celle d'un sujet capable de l'aimer librement donc de le reconnaître comme sujet lui même.

c. Les causes conjoncturelles qui peuvent produire l'échec de la dévolution des situations sont nombreuses: les difficultés «excessives» de la situation, la représentation que s'en font les élèves etc. Mais la première cause est structurelle: le professeur doit faire dévolution d'une situation pas trop fermée pour permettre les adaptations nécessaires à l'apprentissage, l'élève ne peut pas accepter la «responsabilité» de la réussite ou de l'échec dans une situation que, par définition, il ne sait pas résoudre a priori. Il s'attend à ce que le professeur lui enseigne préalablement les moyens de le faire. Le professeur a l'obligation sociale *d'enseigner* tout ce qui est nécessaire à propos du savoir. L'élève – surtout lorsqu'il est en échec – le lui demande.

10. Introduit peut être par Kierkegaard dans «Ou bien… Ou bien», le journal d'un séducteur?, et par Hegel.

Ainsi donc,

— plus le professeur cède à ces demandes et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève *ce* que celui-ci doit faire,
— plus il risque de perdre ses chances d'obtenir les apprentissages visés.

C'est le premier paradoxe: ce n'est pas tout à fait une contradiction, mais le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque: Dans des sociétés qui imposent à l'enseignement des exigences de résultats (en ne s'appuyant que sur des connaissances scientifiques insuffisantes et sur des méthodes de gestion industrielles et commerciales), le professeur «doit assurer» la société et les élèves, qu'il est en mesure d'obtenir les apprentissages désirés[11].

Ce «contrat» didactique met donc le professeur devant une véritable injonction paradoxale: tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée: si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.

Ainsi la didactique consiste à étudier les ruses à l'aide desquelles le professeur dissimule ses intentions tout en les laissant deviner. La «distance» entre les deux est le moyen et la mesure de l'activité mathématique possible ou effective de l'élève. L'enseignant gère de façon continue cette distance pour optimiser le rendement du temps scolaire.

d. Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale: s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter.

La solution de ces dilemmes passe par des processus plus complexes où les intentions affichées et les objectifs réels sont dédoublés. Le professeur doit s'occuper du jeu du joueur pour le faire entrer dans celui de l'actant.

Techniquement, les modèles de jeux a-didactiques envisagés jusqu'ici étaient des jeux de réflexion, qui conduisent à «remplacer» les modèles stimulus-réponses du behaviorisme par des modèles correspondant au moins à des automates finis. Le fait de refuser que le modèle général de l'acquisition de connaissances soit le modèle empiriste skinérien n'interdit nullement de l'utiliser dans quelques circonstances particulières. Le discrédit général de ces méthodes est aussi dommageable que leur universalisation. L'obligation pour le professeur de reconstruire une lecture «didactique» des évènements passés survenus dans la classe, nous a conduits ensuite à recourir à des modèles au moins aussi complexes que des automates à pile de mémoire.

11. La société semble vouloir gérer l'enseignement comme Gengis Khân utilisait les astrologues pour connaître la météo! Elle interroge une collection «d'experts»: tantôt elle suit la majorité, et tantôt, n'obtenant pas ainsi de bons résultats, elle suit quelques marginaux et attend tout d' innovations magiques. Mais en aucun cas elle n'envisage de préparer l'avenir par des recherches véritables dans ce domaine qu'elle ne conçoit que comme pratique.

Maintenant les modèles du type dit «jeux de réflexion» doivent être plongés dans des modèle du type dit «jeux de ruse», où l'information n'est plus totale.

3.3. L'institutionnalisation et ses dérives

Bien que de nombreux textes étudient les situations de ce type (cf. bibliographie), très peu l'ont fait en produisant des modèles en termes de jeux.

3.4. Le paradoxe du comédien

Le fait de concevoir, d'organiser et de mettre en œuvre une situation a-didactique fait du professeur une sorte d'auteur et de metteur en scène; dans la situation didactique où il assure personnellement la gestion de cette «pièce de théâtre», et il devient acteur lui même; et dans la mesure où ses élèves, eux, ne sont pas des acteurs professionnels déclarés, il devient une sorte de manipulateur, d'organisateur de «loft story»[12]. L'idée que le professeur serait un manipulateur des élèves est difficile à accepter. Celle qu'il serait seulement un comédien jouant un rôle a quelque chose de révoltant pour certains professeurs. D'autres accepteraient cette idée mais seulement à la condition d'être des comédiens à l'italienne, c'est-à-dire de créer leur texte au fur et à mesure du déroulement du canevas. Mais l'idée qu'ils pourraient être des acteurs «donnant» un texte déjà écrit, et qui plus est écrit par d'autres, les révulse totalement. Une raison évidente est bien sur qu'il faudrait dépenser une énergie considérable, excessive, pour préparer 6h de spectacle différent par jour selon la formule théâtrale actuelle. Mais il y a d'autres raisons, les professeurs cherchent une authenticité de leur travail et de leurs rapports avec leurs élèves qui exclut la représentation et même le jeu.

Au contraire, conscients de l'impossibilité d'assumer «sérieusement» des contrats fortement didactiques, certains professeurs de mathématiques ont pensé que le mieux qu'ils pouvaient faire était de faire des mathématiques, si possible *avec* leurs élèves, mais au moins devant eux. Plancher, chercher, se tromper éventuellement et se reprendre devant leurs élèves leur paraissait le message le plus honnête et le plus vrai, donc peut-être le plus efficace qu'ils pouvaient délivrer (ce qui correspond au contrat de familiarisation parfois dit «de frayage»).

Mais cette décision ne fait pas échapper la situation au modèle théâtral. Il s'agit de toute façon d'une re-présentation de mathématiques: les élèves savent bien qu'il s'agit d'une simulation, que ce soit avec ou sans leur participation. Que la représentation soit sérieuse, comique ou tragique, tient dans l'influence qu'elle exerce sur le public.

Dans son texte «le paradoxe sur le comédien», Diderot a dénoncé l'illusion de confondre le théâtre avec la vie. Plus le comédien veut éprouver directement les sentiments qu'il doit représenter, moins il est capable de bien les exprimer, de les per-

12. Cette observation m'a amené à m'interroger sur l'enseignement des mathématiques en utilisant les analyses de cet autre jeu qu'est le théâtre. (La métaphore en vaut d'autres et notre étude du jeu comme modèle de l'activité humaine peut inversement être utilisée pour analyser le théâtre).

fectionner, de les reproduire professionnellement dans toutes les circonstances. Assassiner effectivement les Curiaces dans les coulisses ou sur la scène d'Horace n'ajouterait rien à la pièce. L'influence du théâtre sur le public, comme celle des mathématiques sur les élèves, passe par des opérations culturelles et psychologiques plus complexes.

La résolution de ces paradoxes au même titre que l'explication des phénomènes observés, est l'un des buts d'une théorie des situations en même temps qu'un moyen de mettre à l'épreuve sa consistance.

3.5. Les autres doubles jeux

Les autres doubles jeux sont ceux des «mathématiciens» avec les «enseignants» et de la société avec l'enseignement.

Le rôle des institutions et de la communauté mathématique, comme celui de la société en général, est très important. La gestion et les accidents de la transposition didactique (de la mathématisation et dé-mathématisation des textes, des activités, des situations, par exemple) peuvent être étudiés du point de vue de la théorie des situations. Nous ne discuterons pas ici cette possibilité car la complexité et l'étendue des phénomènes exigerait le concours d'autres approches: historiques, épistémologiques, sociologiques, anthropologiques. Qu'un phénomène comme celui des «mathématiques modernes» n'ait fait depuis trente ans l'objet que de pamphlets et d'ouvrages d'opinion (à l'exception de la thèse d'Evelyne Beaulieu) montre, à l'évidence, de quelle façon nous voulons continuer à traiter les questions d'enseignement[12].

Conclusions

Dans ce texte, trop court pour l'article de fond qu'il semble vouloir être par moments, et beaucoup trop long et trop technique pour être celui d'une conférence, nous avons essayé de montrer qu'il y a une possibilité de concevoir les situations didactiques sur le modèle de toutes sortes de jeux.

Cette possibilité n'est pas que théorique. Parmi les principales retombées de la modélisation utilisée en théorie des situations, figurent au premier plan les situations «fondamentales» des principales connaissances de la scolarité obligatoire et leur utilisation répétée dans des classes vivantes.

Certes, pour les utiliser il faut les reconnaître, les pratiquer avec les enfants et les leur faire reconnaître aussi. Il faut donc considérer différemment les actes d'enseignement. Aujourd'hui chaque exercice et chaque leçon sont considérés comme des didactiques inattendus, nouveaux, inventés spontanément et produits par le professeur comme des œuvres d'art personnelles ou comme des jeux pour lui-même.

Pour les élèves, la situation doit avoir les caractéristiques d'un jeu au sens ordinaire. Le fait que le professeur joue lui-même n'a d'importance qu'à proportion du bonheur ou de l'efficacité que cela produit pour les élèves.

12. Il est vrai que des événements aussi importants que la guerre d'Algérie ont subi le même sort.

Il n'y a pas lieu de juger le caractère ludique des situations d'enseignement trop localement. Dans la plupart des vrais jeux il y a des efforts, des difficultés, des moments de concentration, de passion, d'espoir et de déception. Le tout est de rendre possible, pour le plus grand nombre, un investissement qui ressemble suffisamment à ce que présente la vie, tout en permettant d'y éviter ou d'équilibrer ce qu'elle peut avoir de trop dangereux ou contondant. L'étude est parfois un refuge aussi.

Il n'y a pas lieu de vouloir enfermer ces jeux dans des normes uniformes si elles sont inférées par des raisonnements qui font fi des détails. Comme pour tous les objets techniques, c'est la perfection de tous les détails qui assurent aux meilleurs jeux leurs principales vertus. Changez les règles de façon anarchique et vous découvrez vite la faille qui anéantit les vertus du jeu initial.

Il n'y a pas lieu non plus de vouloir inconsidérément remplacer des activités didactiques en classe par des «jeux» directement importés de l'extérieur. Le plus souvent, la réputation de didacticité de ces jeux est purement hypothétique ou au moins largement surévaluée. C'est pourquoi je crois qu'il ne faut pas surévaluer les transferts de motivation et de connaissances – disons l'influence – des activités ludiques périscolaires, comme celles que nous voyons ici, vers les résultats et les comportements scolaires.

L'opinion répète que la pratique du jeu d'échec développerait les qualités mathématiques de ceux qui s'y livrent. Mais je ne connais aucun sujet de mathématique qui serait mieux connu, pratiqué ou aimé après quelques heures de ce jeu, qu'après quelques heures de travail mathématique spécifique. L'intérêt, pour elles-mêmes, des activités mathématiques périscolaires est assez grand pour qu'on les souhaite à nos jeunes gens. Leurs vertus éducatives sont évidentes et leurs effets sur la représentation populaire des mathématiques ou sur les relations de l'école avec son environnement sont bénéfiques. Il n'est pas utile de les parer en plus de vertus didactiques qu'elles n'ont probablement pas et de porter ainsi des armes aux détracteurs de l'école.

L'affirmation répétée que «l'on apprend mieux hors de l'école», «sur le terrain», ou par les vertus de quelque «orvietan», aussi mythique que mystérieux, est une habitude qui se répand de plus en plus. Elle n'a aucun fondement. Elle est motivée par son utilité pour une foule d'intérêts dont aucun ne concerne vraiment les élèves et la culture mathématique. Elle conduit directement les professeurs à éliminer leurs pratiques les plus sûres au profit de méthodes magiques.

Je regrette beaucoup l'accueil complaisant que la communauté des mathématiciens et aussi celle des professeurs offre à ces rumeurs.

Par contre, je crois que nous pouvons espérer faire bénéficier les enfants, dans la classe, des avantages que vous recherchez et obtenez hors de la classe à la condition de considérer plus sérieusement, plus professionnellement, et de façon plus authentique notre travail commun et aussi d'encourager les recherches nécessaires en les utilisant en les «contrôlant» et en y participant.

Articles de l'*Encyclopaedia Universalis*
Cazeneuve J. Jeu. Ehrmann J. Jeu et rationalité. Payen J. et Thines G. Le jeu des Animaux. Château J. Le Jeu Chez L'enfant. Cazeneuve J. Le Jeu Dans La Société. Bouzitat J. Théorie Des Jeux. 1995.

Revue *La Recherche*
(N° spécial Juin). Jeux mathématiques. Greboble: La pensée sauvage, 2000.

Aveline C.
Le code des Jeux. Livre de Poche. Paris: Hachette, 1961.

Berthelot R. et Salin M. H.
L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Bordeaux: IREM, 1992.

Brousseau G.
Théorie des Situations Didactiques. Grenoble: La pensée sauvage. Ouvrage d'abord publié en anglais chez Kluwer (1997) sous le titre *Theory of didactical situation in mathematics* édité et traduit par N. Balacheff, Martin Cooper, Rosamnd Sutherland et Virgina Warfield, 1998.

Brousseau G.
The Case of GAEL. In *Journal of mathematical Behavior* 18 (1) (pp. 7-52), 1999.

Château J.
Le Réel et l'Imaginaire dans le jeu de l'enfant Paris: Vrin. 5e éd. (1975). (1950) *L'Enfant et le jeu*. Paris: Scarabée, 1946.

Diderot D.
Le paradoxe sur le comédien, 1773.

de Fornel M. et Quere L.
La logique des situations. Paris: Editions de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1999.

Huizinga J.
Homo ludens. Essai sur la fonction sociale du jeu. In *Homo ludens* (1951), trad. C.Seresia. Paris: Gallimard, 1938.

Rapoport A.
Combats, débats et jeux. In *Fights, Games and Debates* (1960). (1967) Trad. J. de La Thébeaudière. Paris: Dunod, 1967.

6. Que signifie «et cetera»?

André Delessert

Tutti gli allievi di questo mondo seguono lezioni di matematica. Il programma di questa disciplina è molto carico e si appesantisce anno dopo anno.Solitamente si giustificano questi grossi sforzi affermando che conferiscono rigore allo spirito e che permettono poi di usare la matematica nella professione. In classe non c'è il tempo per approfondire la natura degli oggetti matematici. Questo genere di riflessioni ci giunge dalla filosofia della matematica e di questo si sono occupati gli spiriti più illustri. La filosofia della matematica ci insegna che la matematica non è semplicemente uno strumento al servizio dei fisici e dei tecnici. La matematica è una scienza autonoma, con materia e finalità proprie. Essa apre prospettive sulle potenzialità del pensiero. La mia relazione ha lo scopo di far sentire che tutto ciò concerne sia l'apprendista sia il matematico affermato. Filo conduttore del discorso sarà il concetto di infinito.

Quand on veut évoquer l'alphabet, il suffit de dire: «a, b, c, d, etc.». Tout le monde sait qu'on peut aller au bout de la liste: «... x, y, z» et supprimer l'expression «etc». Mais quand on présente les nombres ordinaires: «un, deux, trois, quatre, etc.», il est possible de prolonger la récitation. Mais on ne peut jamais faire l'économie de la formule «etc.» ou d'une formule analogue. Il y a là une obscurité. Est-ce lié à la langue ou aux mathématiques seulement? Existe-t-il quelque chose qui soit propre aux seules mathématiques? Pour répondre à ce genre de questions, il faut se placer au-dessus des mathématiques. Cela relève de la philosophie des mathématiques.

Laissons cette question de côté pour un moment. Remarquons que tous les élèves du monde sont obligés de suivre des leçons de mathématiques, alors que seule une petite partie d'entre eux en tire bénéfice. Ainsi le profane, qui a pourtant reçu un enseignement des mathématiques, a généralement beaucoup de peine à imaginer ce que font les mathématiciens. Un obstacle bizarre l'empêche d'imaginer le monde des mathématiques.

C'est le fait que les objets qu'étudient les mathématiciens n'ont pas de nom générique. La zoologie étudie les animaux. L'astronomie étudie les corps célestes. On hésite à dire que les mathématiques étudient les mathématiques. C'est alors que certains font remarquer que les mathématiques sont utilisées, directement ou non, par presque toutes les autres disciplines: la physique, l'économie, la technique. Elles ne seraient donc qu'un outil pour les autres. S'il n'existe pas de nom pour désigner leur objet propre, c'est tout simplement qu'elles n'en ont pas. Telle est l'opinion de l'homme de la rue et même de certains mathématiciens.

Pour ceux-là, la Sphère, le Groupe, la Fonction exponentielle seraient des concepts abstraits, c'est-à-dire des notions de nature discursive formées à partir d'observations concrètes en laissant tomber presque tous leurs aspects accidentels. Les objets mathématiques seraient donc fictifs. Nous pourrions jongler intellectuellement avec eux, mais leur origine serait dans nos sensations. Cette opinion s'inscrit dans une conception matérialiste de la science que partagent beaucoup de scientifiques. L'expression la plus nette de cette doctrine est le *physicalisme*.

Il a été formulé en 1933 par le philosophe Raymond Ruyer:

Rien n'est dispensé d'exister physiquement, de figurer à sa place et à son rang dans le tableau par lequel la physique représente le continuum espace-temps.[...]rien, ni valeur, ni signification ne voltige au-dessus des êtres étendus et présents.

Ces mots paraissent clairs. Pourtant ils énoncent un fait qui ne peut pas être établi par la physique: la physique ne peut pas démontrer qu'il n'y a rien en dehors des objets de la physique. Ce décret découle donc de principes qui n'ont pas d'existence au sens de la physique. Il se nie lui-même. Ou, si on préfère, le physicalisme donne justement un exemple d'un fait dont il affirme par ailleurs qu'il n'existe pas.

Paradoxalement, cet énoncé établit donc qu'il existe des choses au-delà du monde physique. Pour les mathématiciens que vous êtes, c'est d'ailleurs une évidence. Vous connaissez des **ensembles infinis**. Ils sont mystérieux, comme tous les objets mathématiques. Mais vous savez les comparer, les classer. Vous distinguez le dénombrable du continu. Pourtant aucun dispositif physique ne permet de mettre en évidence une collection physique infinie. Le mathématicien étudie justement des choses qui «voltigent au-dessus des êtres étendus et présents». On peut donc s'interroger sur la nature de ces objets mathématiques. Nous allons le tenter en examinant justement le cas de l'**infini mathématique**.

Depuis Aristote et jusqu'un 19e siècle (Gauss), malgré quelques exceptions (Descartes, par exemple), les penseurs estimaient que l'infini ne pouvait être utilisé qu'en théologie. En mathématiques, il était interdit d'y voir une notion claire comme celle de cercle ou de polynôme. Ce n'était qu'une sorte d'abréviation pour parler des passages à la limite. L'apparition des ensembles au 19e siècle a permis de faire entrer l'infini dans le domaine des objets mathématiques. Il s'est révélé être une notion inévitable, plus fondamentale encore que le point ou le nombre. A leur insu, tous les mathématiciens en avaient toujours fait usage. Je vais essayer de rendre plausible cette affirmation.

Il est facile de voir que la géométrie euclidienne plane peut être énoncée entièrement en termes d'ensembles. Le plan est un ensemble de points. Toute droite est un sous-ensemble du plan. Deux droites sont parallèles quand leur intersection est vide. Les axiomes de la géométrie euclidienne plane admettent donc un **modèle ensembliste**. Cette remarque est valable pour toute théorie mathématique. En effet, une telle théorie se fonde toujours sur un système d'axiomes. Or en 1930, le mathématicien Kurt Gödel a démontré un théorème important: *tout système d'axiomes est consistant (i.e. non-contradictoire) si et seulement s'il admet un modèle ensembliste*.

Il ressort de ce théorème de Gödel, entre autres choses, que la théorie des ensembles est primitive en ce sens que toute autre théorie mathématique suppose *a priori* la validité de la théorie des ensembles. Donc nous sommes amenés à dire quelque chose de cette théorie. Précisons d'abord qu'elle se distingue de ce qu'on appelle parfois «théorie des ensembles» dans les exposés élémentaires. Par exemple, dans la vraie théorie des ensembles, on ne considère que des ensembles – ou éventuellement des classes d'ensembles – parce qu'il n'existe rien de plus élémentaire que la notion d'ensemble. En théorie des ensembles, l'unique relation fondamentale se note $\mathbf{y} \in \mathbf{x}$. Elle exprime de l'ensemble **y** est un élément de **x**. Les éléments d'un ensemble sont donc toujours des ensembles. L'ensemble vide n'est pas rien. C'est l'ensemble qui ne comporte aucun élément, et qui peut être élément d'un autre ensemble.

Au 19[e] siècle, Cantor et Dedekind ont introduit la notion d'ensemble pour maîtriser l'infinitude des nombres usuels. Là où leurs prédécesseurs voyaient des collections en expansion illimitée (dans le temps), ils observaient des totalités actuelles (hors du temps), qu'ils baptisèrent *ensembles*. Dans la liste des axiomes de la théorie des ensembles, il a donc fallu en introduire un qui postule l'existence d'un ensemble infini, au moins. C'est l'*axiome de l'infini*, qu'on peut présenter ainsi:

1. *il existe un ensemble* **x** *comportant l'élément (ensemble)* **Ø** *tel que si (l'ensemble)* **y** *est élément de* **x**, *alors* **y** ∪ {**y**} *est aussi un élément de* **x**

Cet énoncé appelle quelques remarques.

— Cet axiome ne définit pas la notion générale d'ensemble infini. Mais il implique l'existence d'un ensemble **x** comportant les éléments:

2. **Ø** {**Ø**, {**Ø**}} {**Ø**, {**Ø**}, { **Ø**, {**Ø**}}} { **Ø**, {**Ø**}, { **Ø**, {**Ø**}},{ **Ø**, {**Ø**}, { **Ø**, {**Ø**}}}}........

Ils constituent un sous-ensemble ordonné de **x** qui n'a pas de dernier élément. C'est dans ce sens très particulier qu'il peut être considéré comme *infini*, c'est-à-dire sans fin. Cet axiome a un peu le sens notre «etc» de tout à l'heure. Mais dans le premier cas, il signifie qu'il faut poursuivre la récitation assez longtemps. Tandis que, dans le cas présent, on affirme l'existence actuelle de tous les éléments de (2).

— Avant l'apparition de l'axiome de l'infini, il est impossible de caractériser la finitude, le fait pour un ensemble d'être fini. On peut former de nombreux exemples d'ensembles finis. Mais il n'existe pas de moyen de dire, en général, ce qu'est un ensemble fini. A plus forte raison, on ne peut pas caractériser un ensemble infini en disant qu'il n'est pas fini. Dans un sens *ontologique* – c'est le terme technique des philosophes – l'infini précède le fini.

L'ensemble (2) est infini. Malheureusement il ne nous montre pas clairement ce qu'est la notion générale d'ensemble infini. Toutefois il est bien ordonné. Rappelons qu'un ensemble **z** est dit *bien ordonné* (ou qu'il est muni d'un *bon ordre*) lorsqu'il est totalement ordonné et que toute partie non vide de **z** a un plus petit élément. Il est assez facile de comparer entre eux, sous le rapport de la grandeur, deux ensembles bien ordonnés:

• • • • • • • • • • • • • • • • • •
• •

Il suffit de mettre en correspondance les éléments de même rang. La notion d'infini pourrait être généralisée si on pouvait bien ordonner tout ensemble. Pour cela il est nécessaire d'introduire un axiome exprès, l'*axiome du bon ordre*:

3. *Tout ensemble admet un bon ordre*

Les nouveaux axiomes de l'infini et du bon ordre permettrent de faire apparaître une collection remarquable d'ensembles, qu'on appelle les *ordinaux*:

4. Ø {Ø} {Ø,{Ø}} {Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}} {Ø,{Ø},{Ø,{Ø},{Ø,{Ø},{Ø,{Ø}}}}
...

Cette collection ressemble beaucoup à (2), mais elle en diffère beaucoup, parce qu'elle satisfait les conditions suivantes:

a) Tout ordinal est l'ensemble des ordinaux qui le précèdent dans la chaîne (4). En particulier, si κ est un ordinal, $\kappa \cup \{\kappa\}$ est un ordinal appelé le *successeur* de κ. On le note souvent $\kappa+1$.
b) Réciproquement, tout ensemble qui est une section commençante de (4) est, pris comme élément, l'ordinal qui suit immédiatement cette section.
c) La collection (4) n'est pas un ensemble. Si c'était un ensemble **u** – donc une chaîne commençante de (4) – il serait un ordinal. Il devrait comporter son successeur $\mathbf{u} \cup \{\mathbf{u}\}$ et on aurait $\mathbf{u} \in \mathbf{u}$. Ce qui est exclu. Cela montre que la collection (4) ne coïncide pas avec l'ensemble (2).
d) Les ordinaux sont bien ordonnés par la relation $\in$.

On montre que tout ensemble bien ordonné **z** est isomorphe, en respectant le bon ordre, avec une section commençante de (4). C'est un ordinal qu'on appelle *ordinal de* **z**. (4) est donc une échelle qui permet de comparer tous les ensembles bien ordonnés. Tout ordinal a un successeur. Mais la remarque c) montre qu'il en existe qui ne sont pas successeurs. On appelle *ordinal-limite* tout ordinal différent de Ø qui n'est pas successeur. La même remarque établit qu'il existe des ordinaux-limites et que tout ordinal-limite est infini.

Prenons un ordinal-limite κ et les ordinaux-limites qui le précèdent. Ils constituent un sous-ensemble bien ordonné pris dans la suite (4). Ils possèdent un plus petit élément qu'on note généralement ω**.** C'est le plus petit ordinal-limite. Ses éléments sont Ø et les successeurs itérés de Δ. Ils sont, par définition, les *ordinaux finis*. Si on désigne par 0 le numéral de Ø, par 1 celui de {Ø}, par 2 celui de {Ø,{Ø}} **et cetera**, on peut écrire la suite des ordinaux jusqu'à ω

0, 1, 2, 3, ... ω

Les *ensembles finis* sont ceux dont les ordinaux sont finis.

Les ensembles finis justifient l'apparition des nombres naturels. Ils exigent l'introduction préalable de deux axiomes très forts: l'axiome de l'infini et celui du bon ordre. Contrairement à ce qui se pratique d'habitude, le déploiement interne des mathématiques fait apparaître l'infini avant le fini.

Nous pouvons revenir maintenant sur les mots «et cetera». Leur signification est liée à la notion de bon ordre. Ils prescrivent de progresser dans une collection bien ordonnée en respectant les règles du bon ordre. C'est le sens profond de cette expression. Quand on l'emploie dans le cas d'une collection sans bon ordre et ne formant pas une totalité, comme {le bien, le mal, la guerre, le danger, ... etc.}, «etc.» n'a qu'une signification très vague. Le lecteur ou l'auditeur peut l'interpréter à sa guise.

Un objet mathématique existe dès que les axiomes de la théorie où il apparaît sont non-contradictoires. Pour cela, il faut et il suffit que la théorie considérée admette un modèle ensembliste. Ce théorème s'applique à toutes les théories, à l'exception de la théorie des ensembles, évidemment. Il faudrait donc prouver directement que la théorie des ensembles est *consistante*, c'est-à-dire non-contradictoire. Or, à ce stade, nous ne disposons que de la théorie des ensembles. C'est dans cette théorie seulement qu'on peut espérer prouver sa consistance. A ce point précis, Kurt Gödel intervient avec une version de son célèbre *théorème d'mcomplétude*:

> *Si elle est consistante, la théorie des ensembles*
> *ne permet pas de prouver sa consistance.*

Cet énoncé paraît assez normal. Il exprime au fond qu'on ne peut pas se soulever soi-même en se tirant par les cheveux. Mais il a été souvent interprété par des philosophes incompétents ou malveillants comme la preuve de l'inconsistance de la théorie des ensembles, donc de l'échec définitif des mathématiques. En réalité, il faut pousser le raisonnement jusqu'au bout. Si la théorie des ensembles était contradictoire, on pourrait y démontrer chaque proposition et sa négation. En particulier, nous avons vu que Ø et {Ø} sont deux ensemble différents. Ou, si on préfère que $0 \pi 1$. Mais on pourrait aussi y démontrer le contraire: $0 \neq 1$. Alors c'est toute l'arithmétique ordinaire, toute la physique, toutes les sciences qui se fondent sur les mathématiques qui s'effondreraient. Et même toute pensée deviendrait incohérente, les réflexions du marchand de marrons comme celles de l'artiste et du philosophe. Personne ne peut imaginer un tel chaos.

Notre cheminement nous conduit à réfléchir sur la nature des objets mathématiques. Les plus ordinaires, les nombres naturels par exemple, s'enracinent dans la notion d'infini qui n'admet aucune manifestation physique. Cette notion et celles qui en découlent ne peuvent donc pas être obtenues par abstraction. De plus, les objets mathématiques sont situés hors du temps. Ils ne peuvent pas être créés à un moment de l'histoire du monde par un esprit humain. On hésite à affirmer qu'à partir du quatrième siècle avant notre ère, les médianes d'un triangle ont commencé à passer par un même point. Kurt Gödel donne encore un autre argument. Lorsqu'un mathématicien démontre un théorème, il met en évidence un fait inéluctable, une frontière indépassable. Si les objets mathématiques étaient des créations humaines, comme les personnages d'un roman, ils se soumettraient à nos fantaisies. On pourrait leur prêter des attributs arbitraires. Or nous savons tous, au contraire, qu'ils sont terriblement résistants.

Cette *résistance* est le caractère propre des choses réelles. Parvenus à ce stade, il nous semble bien que les êtres mathématiques appartiennent à un univers réel, immatériel, mais accessible à la pensée. Le mathématicien les découvre, mais il ne les crée pas. Notre petit voyage montre qu'il peut les découvrir longtemps après les avoir utilisés.

Concluons. Les notions mathématiques forment dans leur totalité un monde réel non-physique. Elles sont organisées grâce par des principes très subtils, comme les axiomes de l'infini et du bon ordre, par exemple. Leur consistance est garantie par un principe supérieur à elles, comme le montre le théorème d'incomplétude de Gödel. L'univers mathématique apparaît comme une réalité qui s'élève vers les régions les plus hautes de la pensée. Trop de gens croient que les mathématiques réduisent la pensée au règne de la quantité. Au contraire, elles offrent à l'esprit l'image de la transcendance.

On constate que l'existence des mathématiques n'est pas un fait mathématique, ni même un fait scientifique. Il est à la fois le témoignage et le garant de toute vie intellectuelle. Cela implique deux conséquences:

- Il faut maintenir l'enseignement des mathématiques dans la formation des jeunes.
- Il faut élaborer cet enseignement en ne perdant pas de vue la perspective philosophique où il s'inscrit.

7. Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica

Bruno D'Amore
Dipartimento di Matematica – Università di Bologna

Learning Mathematics is a multiform and complex process, by no means only a direct result of teaching. From the 1960s, Guy Brousseau laid the basis for a discipline that today is autonomous and well-founded, while still in construction. One of the most complex and urgent questions is that of relating two diverse and apparently unreconcilable aspects. Here the author attempts a synthesis betwen the founding and fundamental ideas of Brousseau and the results of the work on Noetics and Semiotics by Raymond Duval, showing how the latter can shed light on classroom behaviours originally studied by Brousseau.

1. Apprendere la Matematica

«*Apprendere la Matematica*» è un processo complesso che coinvolge un'infinità di fattori. Gli studi pionieristici di Brousseau, iniziati alla fine degli anni '60, contribuirono a fare piazza pulita di ogni precedente semplificazione basata sulla esclusività del fattore «insegnamento», ponendo invece l'accento sulla centralità del rapporto tra «insegnamento» e «apprendimento» [il lavoro di Brousseau del 1986 è solo la punta di un iceberg, uno degli articoli più citati al mondo, che rappresenta però una sintesi, non un punto di partenza; in effetti Brousseau aveva iniziato a pubblicare i suoi risultati di ricerca già negli anni '60 (Perrin-Glorian, 1994)]. Tali studi hanno, tra l'altro, mostrato al mondo che la Didattica della matematica è una disciplina a sé stante, con caratteristiche sue proprie che non possono essere ascritte all'interno della sola Matematica, ma neppure di Pedagogia, Psicologia ecc.

Furono a quel tempo determinanti le idee di «contratto», di «ostacolo», di «situazione» ecc. che, oggi, sono parte fondamentale del vocabolario specifico della nostra disciplina (D'Amore, 1999b). Pur arricchendosi di mille contributi, densi e importanti, questi concetti di Brousseau restano decisivi per la comprensione piena del processo complesso detto sopra.

Tuttavia, a volte è necessario semplificare, sia per «penetrare» all'interno dei fenomeni e impossessarsi di loro componenti specifiche, sia quando si voglia iniziare una formazione specifica, sia per dialogare senza doversi sempre sobbarcare il carico complesso di definizioni, citazioni e sottointesi.

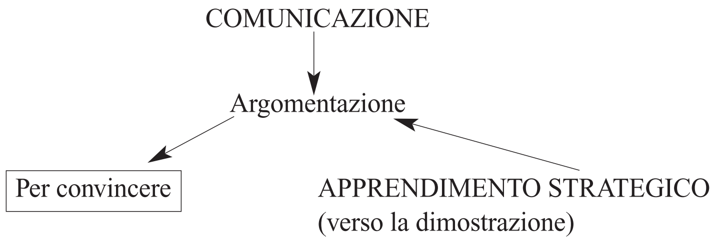
Così, proprio per semplificare, si potrebbe dire che l'apprendimento matematico ha di specifico il fatto che esso si articola su varie direzioni, dato che coinvolge:

- l'apprendimento di concetti
- l'apprendimento e la gestione di algoritmi
- alcuni apprendimenti che qualcuno chiama nel loro complesso «strategici» e che si possono distinguere in due grandi filoni:

– risoluzione di problemi
– dimostrazione

- l'apprendimento della comunicazione specifica in Matematica.

Le varie componenti di questa suddivisione non sono a intersezioni rigidamente vuote; per esempio, la «argomentazione» in Matematica rientra sia nella comunicazione sia nell'apprendimento strategico, come fase preliminare alla dimostrazione:



A me sembra che l'apprendimento concettuale (al quale si riserva spesso il nome di *noetica*) sia in un certo qual senso preliminare agli altri; è vero che vi sono apprendimenti elementari di Matematica da parte dei bambini (il sapersi orientare, il saper contare ecc.) che sembrano non richiedere concetti (sono spesso detti «ingenui» in contrapposizione a «formali») (D'Amore, 1999c); essi sono tuttavia preliminari e assunti in forma implicita e ingenua, appunto, più un'euristica all'interno dell'imitazione adulta che non una vera e propria costruzione consapevole. Mi sembra che gli apprendimenti consapevoli e costruttivi debbano avere sempre alla base un concetto sul quale si elaborano o si effettuano trasformazioni.

Questo spiega la mia insistenza di questi ultimi anni sulla noetica. Senza nulla togliere alla complessità del sistema «insegnamento-apprendimento», mi sembra utile dedicare riflessioni sulla noetica ai diversi livelli di scolarità.

2. Concettualizzare gli «oggetti» della Matematica

Ora, in Matematica, si parla spesso di «concetti» (qualche volta a sproposito). Senza voler fare il pedante filosofo, possiamo però dire almeno che i concetti matematici hanno, rispetto a quelli di altre discipline, alcune specificità:

- ogni concetto matematico ha rinvii a «non-oggetti», dal punto di vista di un realismo ingenuo; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi;
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono «oggetti» da esibire in loro vece o a loro evocazione[1];

1. Qui «oggetto» è ingenuamente inteso nel senso di «oggetto reale» o di «cosa». Quale sia il significato di questa parola («oggetto reale - cosa») è espresso in modo ancora oggi convincente nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la «cosa», in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti:
   - tridimensionalità,
   - accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi contemporaneamente) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche,
   - possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre «cose».

dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci: dunque, in matematica, non c'è accesso sensibile (vista, tatto, …) diretto agli «oggetti» ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici.

Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli Autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno*, *oggetto*), il che porta al cosiddetto *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato proprio da Duval (1993)[2] e che io presenterò tra breve.

Riassumo parte di quanto già detto nel seguente schema:

Oggetto matematico da concettualizzare: non esiste come oggetto reale
OGGETTIVA INACCESSIBILITÀ ALLA PERCEZIONE

↓

(Conseguente necessità di) rappresentanti semiotici

↓

Attività matematica → sugli oggetti
Attività matematica → sui rappresentanti ↓ conseguente *paradosso cognitivo* del pensiero matematico

Vediamo allora in che cosa consiste questo *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, che ha forti ripercussioni cognitive (Duval, 1993, p. 38): «(…) d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presqu'inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques».

2. Ma i primi lavori di Duval su questo argomento sono del 1988.

In questo paradosso, così ben evidenziato da Raymond Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni, come tento di provare in D'Amore (2003a). Il problema principale, per dirla qui brevemente, sta nel fatto che, secondo l'insegnante, secondo la noosfera e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un «oggetto» matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell' «oggetto». Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all'«oggetto» e l'insegnante e la noosfera tendono talvolta a non separare oggetto e sua rappresentazione; lo studente è come bloccato, come inibito: non può far null'altro che confondere «oggetto» e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. Il suo rapporto personale al sapere ha come «oggetto» qualche cosa di sfumato, di confuso. E quindi, di fronte a un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso «oggetto», lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la noosfera non capiscono il perché e accusano lo studente, colpevolizzandolo di qualche cosa che egli non capisce, lo accusano di una incapacità vaga, non circostanziata e dettagliata: nessuno sa *esattamente* che cosa, davvero, lo studente non sa e non sa fare.

3. Semiotica e noetica

In Matematica, dunque, l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Lo dice esplicitamente Duval, presentando la problematica dei registri, nei celebri articoli del 1988 pubblicati sugli *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) [dei quali il lavoro del 1993 costituisce un primo tentativo di sintesi (1993)]; lo confermano Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994).

Dunque, prendendo a prestito da Duval: non c'è noetica senza semiotica.

Tanto per chiarezza terminologica, ma senza alcuna pretesa di completezza, dato che non sempre questi termini sono usati nello stesso senso, preferisco esplicitare i significati dei quali mi servo; forzando non troppo la mano, tendo a volgere tutta l'argomentazione verso il campo didattico, più che verso quello filosofico cui sembra appartenere l'argomentazione a maggior ragione:

semiotica $=_{df}$ acquisizione di una rappresentazione realizzata per mezzo di segni

noetica $=_{df}$ acquisizione concettuale di un oggetto[3]

Indicherò, d'ora in poi:

r^m $=_{df}$ registro semiotico ($m = 1, 2, 3, \ldots$)

$R^m_i(A)$ $=_{df}$ rappresentazione semiotica i-esima ($i = 1, 2, 3, \ldots$) di un concetto A nel registro semiotico r^m

3. Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.

Si può notare che, in base a queste scelte, se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.

Ancora una volta, uso un grafico per illustrare la questione, perché mi sembra più incisivo ed efficace[4]:

caratteristiche della semiotica	{ *rappresentazione* *trattamento* *conversione*	{ queste tre sono attività cognitive diverse

concetto A da rappresentare

↓

scelta dei tratti distintivi di A

↓

RAPPRESENTAZIONE di A $R^m_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m

↓

trasformazione di rappresentazione

TRATTAMENTO ↓

nuova rappresentazione ($i \neq j$) $R^m_j(A)$ nello *stesso* registro semiotico r^m

↓ trasformazione di registro CONVERSIONE ↓

nuova rappresentazione ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n_h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^n ($n \neq m$)

($m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots$)

A questo punto è doverosa una precisazione sulla teoria che da anni sta sviluppando Raymond Duval. In essa, egli accorda alla conversione un posto centrale rispetto alle altre funzioni e in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata invece dai più come decisiva dal punto di vista matematico fino a qualche tempo fa.

La teoria dei registri deve essere valutata basandosi sugli apporti relativi alla ricchezza, alla novità delle osservazioni, così come alla novità delle attività di apprendimento che le variabili cognitive permettono di definire. E non in rapporto a delle decisioni a priori su che cos'è la matematica o in base a considerazioni globalizzanti non controllabili attraverso metodologie precise.

È ogni singolo allievo che apprende, e nessuno può apprendere (o comprendere) al posto di un altro! Inoltre, la riuscita di un'azione didattica non si giudica immediatamente, ma solo alcuni anni più tardi: ci sono molti casi di riuscita immediata che si rivelano poi essere degli insuccessi, a distanza di tempo… E viceversa.

4. Faccio ancora riferimento a Duval (1993).

Ecco, dunque, perché Duval insiste sul carattere centrale della conversione; è questo il punto decisivo, quel che veramente differenzia la sua teoria dei registri, rispetto a tutto quel che si può dire e si usa dire su segni e semiotica, o, più genericamente, sul cognitivo.

4. Noetica, semiotica e una visione ingenua del costruttivismo

La costruzione dei concetti matematici è dunque strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti:

- di *rappresentarli* in un dato registro
- di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro
- di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro a un altro

L'insieme di questi tre elementi e le considerazioni dei precedenti paragrafi, mette dunque in evidenza il profondo legame che c'è tra noetica e costruttivismo: che cosa vuol dire «costruzione della conoscenza in matematica» se non proprio l'unione di quelle tre «azioni» sui concetti, cioè l'espressione stessa della capacità di *rappresentare* i concetti, di *trattare* le rappresentazioni ottenute all'interno di un registro stabilito e di *convertire* le rappresentazioni da un registro a un altro?

È come se si stessero specificando le operazioni-base che, nel loro insieme, definiscono quella «costruzione» che, altrimenti, resta un termine misterioso e ambiguo, disponibile a ogni sorta di interpretazione, anche metafisica[5].

[Si noti ancora che, da un punto di vista cognitivo, insisto sul fatto che si deve accordare più importanza al punto 3 (la conversione) piuttosto che al punto 2 (il trattamento) perché ciò permette di definire le variabili indipendenti sia per l'osservazione sia per l'insegnamento.

Ma da un punto di vista matematico si usa storicamente accordare più importanza al trattamento piuttosto che alla conversione. Ed è per questo che nella storia i matematici hanno sviluppato dei registri specifici che hanno permesso forme diverse di calcolo (aritmetico, algebrico, analitico, logico, ...)].

5. Risvolti didattici: mancata accettazione della devoluzione, scolarizzazione dei saperi

La rinuncia dello studente alla *devoluzione* (rinuncia ovviamente inconsapevole), l'incapacità dello studente di implicarsi (come risultato di esiti negativi nei casi di tentativi), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate alla incapacità (talvolta solo supposta) o di rappresentare, o di trattare o di convertire, a causa di una mancanza didattica specifica a monte. L'insegnante potrebbe infatti non preoccuparsi dei singoli componenti della costruzione a causa di una supposta identità tra semiotica e noetica

5. Naturalmente questa osservazione, tutto il paragrafo, ma anche tutto questo testo, sono specifici per la matematica; non so valutare quanto siano estendibili a una teoria dei concetti o, addirittura, a una gnoseologia.

(Duval, 1993) (identità che è molto diffusa nel pensiero degli insegnanti, specie di quelli che non hanno mai avuto occasione di riflettere su questa questione, o che la considerano superflua)[6]. Ciò potrebbe portare alla scelta rinunciataria da parte dello studente e quindi alla scolarizzazione dei saperi (D'Amore, 1999a):

«Con il termine "scolarizzazione del sapere" intendo qui riferirmi a quell'atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l'allievo, a un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare), delega alla Scuola (come istituzione) e all'insegnante di scuola (come rappresentante dell'istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione,…). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell'insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente e insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente e il sapere: è quel che (…) si chiama "scolarizzazione delle relazioni"».

6. Conclusioni

1. Solo un'attenta riflessione su questi aspetti, apparentemente così astratti e astrusi, lontani dalla pratica didattica, ci fornisce strumenti concreti per riconoscere diffusi fatti d'aula. Rinuncia alla devoluzione e scolarizzazione, sono fenomeni negativi sempre in agguato a qualsiasi livello scolastico. Ora sappiamo che causa di essi possono essere malfunzionamenti cognitivi originati dall'aver confuso semiotica e noetica, dall'aver cioè creduto di aver costruito sapere solo perché ci si è impadroniti di sue rappresentazioni parziali.
2. Considero fondamentali per lo studio della Didattica della matematica le opere di due pionieri francesi, Guy Brousseau e Raymond Duval; i loro contributi (del primo, a partire dagli anni '60; del secondo a partire dagli anni '80) sono stati fondamentali, pur nella loro ovvia ed evidente profonda diversità. Con questo lavoro [e soprattutto con il più approfondito D'Amore (2003b)] suggerisco un legame profondo tra i due studi; partendo dalle ipotesi fondamentali di Brousseau e mettendo in campo le intuizioni e le ricerche di Duval, è possibile ritornare all'aula vera e propria, quella vera, quotidiana, quella che interessa noi ricercatori e qualsiasi insegnante, e rispondere a domande che, altrimenti, sono destinate o a restare senza risposta o ad avere risposte banali. Mi piace sottolineare con ciò l'attualità imperitura degli studi anticipatori di Brousseau, al quale tutti noi siamo debitori, che, ben lungi dall'essere superati o datati, rivelano invece tutta la loro vitalità e la loro incredibile forza analitica. Tutta ancora da scoprire.

6. Il che rimanda a un discorso assai più generale, quello sulle credenze implicite dell'insegnante, affrontato in modo profondo, sistematico e ricorrente, in (Speranza, 1997).

Brousseau G.
Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, pp. 33-115, 1986.

Chevallard Y.
Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG. Grenoble: Université J. Fourier, 1991.

D'Amore B.
Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, pp. 247-276, 1999a.

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 1999b.

D'Amore B.
La Matematica in continuità tra la Scuola dell'Infanzia e la Scuola Elementare. Bologna: Pitagora, 1999c.

D'Amore B.
La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, pp. 47-51, 2003a.

D'Amore B.
Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 2003b.

Duval R.
Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, pp. 7-25, 1988a.

Duval R.
Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, pp. 57-74, 1988b.

Duval R.
Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, pp. 235-253, 1988c.

Duval R.
Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5,pp. 37-65, 1993.

Godino J.D., Batanero C.
Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 3, pp. 325-355, 1994.

Perrin Glorian M.-J.
Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage. (pp. 97-148), 1994.

Speranza F.
Scritti di Epistemologia della Matematica. Bologna: Pitagora, 1997.

II.

Comunicazioni

1. «Diventare competente»: una sfida con radici antropologiche

Martha Isabel Fandiño Pinilla
N.R.D. Università di Bologna

La *competenza* è oggi da tutti riconosciuta come qualche cosa di più che una *conoscenza*, ben di più che un «saper fare in un dato contesto», come vari Autori la definivano al momento iniziale del dibattito, qualche decennio fa. La competenza implica anche un «*voler* fare», dunque chiama immediatamente in causa fatti affettivi, come volizione e atteggiamento.

Modi di intendere la motivazione

- Ogni problema può essere presentato come la ricerca della soddisfazione di una necessità avvertita dalla società stessa, nella sua generalità, il che fa sì che gli interessi personali di ciascuno si trasformino nell'interesse del gruppo sociale di appartenenza.
- L'interesse del soggetto sta nel tentativo di soddisfare le sue proprie necessità e nello studio – analisi – conoscenza delle proprietà dell'oggetto (inteso non solo in senso fisico) che si ritiene possa soddisfarle.
- Una terza tendenza considera l'importanza della motivazione come qualche cosa di intrinseco, specifico, tipico dell'essere umano, una vera e propria propensione naturale.

Matematica e linguaggio. Apprendimento

L'apprendimento della Matematica va molto oltre le condizioni nelle quali si apprende un linguaggio (sintassi, semantica e pragmatica); la Matematica non è (solo) un linguaggio in sé stessa, dato che non si è formata con lo scopo di comunicare *ogni* tipo di pensiero dell'essere umano; il linguaggio della Matematica si creò per comunicare *certe* specifiche proprietà di particolari «oggetti» e le loro relazioni con il mondo empirico. Inoltre le espressioni matematiche portano con sé una grande difficoltà, dato che non sono indipendenti dal contenuto: esprimere qualche cosa in Matematica implica conoscerlo, dominarlo; il simbolismo è carico di significati che devono essere conosciuti da parte di chi li sta usando (emittente e ricevente).

In ogni apprendimento c'è un cambio di norme di comportamento sia affettivo, sia linguistico; se questo cambio si realizza senza conoscere il significato delle proposizioni usate, è un cambio che non avrà durata nel tempo. Una volta che smetta di aver senso la necessità di dare risposte, si dimentica quanto «appreso», dato che questo apprendimento viene considerato fuori dal contesto. *Smette dunque di operare la motivazione*.

Se, al contrario, si dà al sapere appreso una giustificazione, per esempio gli si riconosce un senso all'interno della realtà stessa del soggetto, allora si fornisce nell'individuo la forza di mettere in moto elementi e relazioni, facendo sì che i cambi di comportamento permangano nel tempo.

La competenza in Matematica. La competenza matematica

La *competenza in Matematica* si centra nella disciplina Matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico, di conoscenza. L'allievo entra in contatto con saperi specifici, saperi che la società ha inglobato nelle conoscenza riconosciute come base per un dignitoso ingresso nel suo interno; si appropria di una parte di tali saperi, tanto formalmente quanto informalmente. Si riconosce così l'esistenza di un dominio concettuale ed affettivo che media tra l'allievo stesso e la Matematica. La competenza è qui vista all'interno dello specifico àmbito scolare.

La *competenza matematica* si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. L'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche, è un esempio di questo tipo di competenza. Ci sono buoni risolutori di problemi che possono riconoscere, delimitare e risolvere situazioni problematiche; il che, viceversa, a volte, non è facile da evidenziare in persone che trattano bene, per esempio, algoritmi. Aspetti come il gusto e la valorizzazione della Matematica, sono alcuni degli aspetti utili per orientare il raggiungimento della competenza matematica. Infine gli aspetti nella competenza matematica e della competenza in matematica sono:

- il cognitivo: conoscenza della disciplina;
- l'affettivo: disposizione, volontà, desiderio di rispondere ad una sollecitazione esterna o interna;
- la tendenza di azione: persistenza, continuità, sollecitudine.

La scuola deve optare per il raggiungimento tanto della competenza in Matematica quanto della competenza matematica, però deve privilegiare quest'ultima.

Poiché la competenza matematica comporta la capacità – disponibilità a guardare il mondo in modo matematico e dato che ciò non si apprende spontaneamente in modo implicito, si rende necessario pensare che deve far parte del curricolo proprio questo processo di insegnamento – apprendimento specificamente rivolto a saper vedere matematicamente il mondo.

Possiamo parlare di diverse competenze in Matematica o, se si preferisce, di diverse componenti della competenza in Matematica; quanto meno abbiamo in lista:

- il dominio degli aspetti semiotici (scelta dei tratti rappresentativi dell'oggetto da rappresentare, trattamento e conversione delle rappresentazioni semiotiche nei vari registri);
- il dominio che concerne la risoluzione di problemi (approssimare, proporre strategie, scegliere l'algoritmo adatto, confrontare strategie,…);

- il dominio della problematica che concerne il grande capitolo della cosiddetta «comunicazione matematica» (giustificazione, argomentazione, dimostrazione,…)
- …

Le filosofie pragmatiste e la competenza. La scelta antropologica

All'interno di una corrente *realista*, la competenza di tipo esogeno (competenza matematica) deriva dalla competenza endogena (competenza in Matematica) grazie all'azione del transfer cognitivo.

All'interno di una scelta *pragmatica*, dato che qui ogni apprendimento è necessariamente situato, la competenza matematica si conquista attraverso il ricorso a diverse situazioni; è l'àmbito, è la situazione, è la pragmatica d'*uso* che determinano, allo stesso tempo, sia la costruzione di una conoscenza, sia la creazione di una competenza da parte dello studente.

Bibliografia

D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora, 2003.

2. Situazioni a-didattiche in ambienti di e-learning

Giovannina Albano
Centro di Eccellenza «Metodi e sistemi per l'Apprendimento e la Conoscenza»
DIIMA – Università degli Studi di Salerno
albano@diima.unisa.it

1. Quadro teorico

La moderna ricerca in Didattica della Matematica segue la teoria delle situazioni di Brousseau (1997), secondo cui «*Nella didattica moderna, l'**insegnamento** è la devoluzione allo studente di un'appropriata situazione adidattica, l'**apprendimento** è l'adattamento dello studente a tale situazione*». In una situazione adidattica la conoscenza da apprendere è implicitamente contenuta nell'ambiente con cui lo studente interagisce e il ruolo del docente è quello di preparare opportunamente la situazione in modo da favorire la costruzione della conoscenza da parte dello studente stesso, che avviene attraverso una «rottura di uno stato di equilibrio» e procede attraverso una serie di vincoli imposti dall'ambiente (detto «milieu antagonista») verso un nuovo stato di stabilità, che caratterizza l'acquisizione di un nuovo concetto.

Facciamo riferimento a quattro tipi (o fasi) di situazione:

• *Situazioni di azione*: sono quelle in cui lo studente interagisce con l'ambiente, costruisce strategie, ovvero «insegna a se stesso come risolvere il problema» (Brousseau 1997, p. 9). In questo senso si parla di «dialettica di azione» poiché lo studente da un lato può anticipare il risultato delle sue scelte e dall'altro le strategie scelte sono confermate o meno dalla sperimentazione/interazione con l'ambiente. Le situazioni di azioni promuovono nello studente il sorgere di un «modello», ovvero di una rappresentazione della situazione, che può essere più o meno implicito. In base al modello che lo studente si man mano si costruisce, egli farà le scelte successive.

• *Situazioni di formulazione:* sono quelle in cui lo studente manda messaggi al milieu antagonista con l'intenzione di presentare un'opinione (Brousseau 1997, p.61). Nel momento in cui le strategie vengono formulate, ci sono due di feedback: uno dall'ambiente (milieu) che una volta applicata la strategia formulata dà risposta positiva o meno; uno dagli altri studenti con cui si interagisce che dicono se hanno capito o meno. Le situazioni di formulazione favoriscono l'acquisizione di modelli e linguaggi espliciti; se hanno dimensione sociale esplicita, si parla di situazioni di comunicazione (D'Amore, 1999, p. 81).

• *Situazioni di validazione:* sono quelle in cui i messaggi scambiati col milieu sono asserzioni, teoremi, dimostrazioni, tanto mandate quanto ricevute, ovvero le affermazioni devono essere soggette a un giudizio da parte dell'interlocutore che deve essere in grado di dare un feedback, protestare, rigettare un ragionamento, fare dei controesempi, etc., perciò ci dev'essere una situazione simmetrica *a priori*, non è vantaggiosa una discussione tra docente e studente. Queste situazioni devono portare lo studente a evolvere e rivisitare la propria opinione, rimpiazzare teorie false con altre vere, a organizzare le dimostrazioni. Sottolineiamo che gli studenti devono essere portati a scoprire i propri errori, questa attività risulta anzi fondamentale per la costruzione della conoscenza.

• *Situazioni di istituzionalizzazione:* hanno lo scopo di stabilire e dare uno status ufficiale a conoscenze apparse durante l'attività a-didattica. È ciò che permette il passaggio da *knowing* (come costruzione personale) a *knowledge* (come costruzione socialmente condivisa) (Balacheff, 1999, p.3).

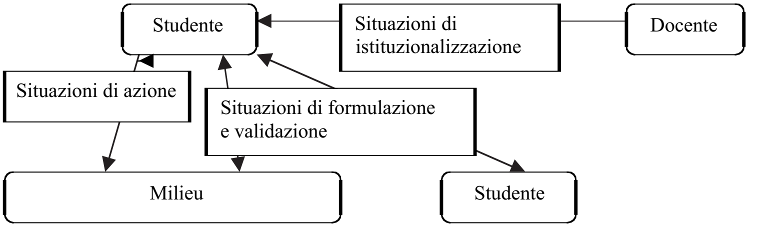
2. Le nuove tecnologie nella didattica

Oggigiorno viviamo in una società dell'Informazione e della Conoscenza. Le ICT (Tecnologie dell'Informazione e della Comunicazione) hanno cambiato il nostro modo di essere e di comunicare. Questo cambiamento investe inevitabilmente anche il campo dell'Istruzione. Numerose sono le iniziative intraprese in ambito europeo per diffondere lo sviluppo dell'utilizzo didattico delle tecnologie nelle istituzioni scolastiche. Citiamo ad esempio il Programma *e*Learning (2003) della Commissione Europea «*il cui obiettivo globale è quello di sostenere e sviluppare ulteriormente l'uso efficace delle ICT nei sistemi europei di istruzione e formazione, come contributo ad un'istruzione di qualità e come elemento essenziale per adeguare tali sistemi alle esigenze della società della conoscenza nel contesto di una formazione permanente*» e ha tra i suoi obiettivi specifici quello di «*sfruttare il potenziale dell'elearning nel contesto dell'innovazione nei metodi di insegnamento allo scopo di migliorare la qualità del processo di apprendimento e di favorire l'autonomia degli insegnanti*».

È nostra convinzione che la tecnologia possa e debba essere uno strumento atto a favorire un apprendimento profondo e non sia solo un mero strumento di calcolo. Attualmente le esigenze di calcolo possono essere soddisfatte dai calcolatori, pertanto c'è bisogno di ridisegnare i programmi scolastici, le attività e le metodologie didattiche, dando più spazio alla capacità di leggere e interpretare concetti matematici piuttosto che fermarsi su aspetti procedurali (Kutzler, 1999). Nell'ambito dell'apprendimento della matematica, alcune caratteristiche importanti offerte dalla tecnologia sono la possibilità di gestire facilmente sistemi a rappresentazione multipla (simbolica, numerica, grafica) e di favorire la costruzione di congetture, controesempi e verifiche di teoremi.

Le situazioni a-didattiche sembrano calarsi particolarmente bene in ambienti di elearning, opportunamente predisposti, dove in maniera «naturale» l'ambiente (milieu) assume un ruolo predominante come antagonista, mentre il docente ha un ruolo di facilitatore.

Nello schema che segue vogliamo concentrarci soprattutto sulla fase di implicazione dello studente in ambienti di elearning.



Lo studente è inizialmente coinvolto in situazioni di azione, dove viene immerso in un contesto motivante e coinvolgente, che prevede fasi attive e scelte fatte e gestite personalmente dall'allievo, a cui il milieu replica. Queste situazioni possono essere realizzate attraverso fogli di lavoro, simulazioni, ambienti virtuali, motori di calcolo numerico e simbolico, opportunamente predisposti dal docente, dove lo studente può ad esempio cambiare alcuni parametri e osservare come le sue scelte incidono e modificano l'ambiente, che ad esempio produce grafici, calcoli, errori, tabelle, etc.

Successivamente lo studente viene coinvolto in situazioni di formulazione, dove deve esplicitare il modello implicito che si è costruito «agendo», ad esempio gli viene richiesto di esplicitare le relazioni che intercorrono tra le variabili in gioco, di scrivere una formula, di realizzare un algoritmo, etc. Questa volta il milieu risponde secondo le regole del modello dato dallo studente che ha così modo di vedere se quanto da lui supposto produce risultati coerenti o meno alle sue congetture. È auspicabile che queste situazioni siano in particolare situazioni di comunicazione, prevedendo un confronto con altri studenti, in un processo di apprendimento collaborativo, attraverso strumenti (sincroni e asincroni) specifici per la comunicazione, per la condivisione di risorse, per il supporto di processi di gruppo (chat, videoconferenze, lavoro condiviso su uno stesso file). La comunicazione con l'ambiente e con gli altri discenti costringe lo studente all'uso di un linguaggio adeguato.

Una volta *formulati* i propri modelli, è necessario che lo studente *validi* le proprie teorie, attraverso situazioni di validazione dove allo studente viene richiesto di giustificare le proprie asserzioni, di provare la loro validità in maniera più formale e generale che non la semplice osservazione dei risultati prodotti dall'implementazione del modello. Questo può essere fatto richiedendo allo studente di raccogliere le proprie riflessioni e giustificazioni in un documento, da inviare ai propri compagni. In questa fase un posto importante assume il dibattito con gli altri studenti. Ognuno di loro dovrà «contestare» le dimostrazioni presentate dagli altri e ciascuno dovrà difendere le proprie tesi. Al termine di queste situazioni, dopo successivi aggiustamenti e puliture da errori, lo studente è giunto alla produzione del proprio sapere personale (mediato), che necessita però di essere istituzionalizzato, cioè di essere accettato come sapere *socialmente* valido per gli esperti del dominio. A tal fine nella situazione di istituzionalizzazione della situazione, il docente esplicita il sapere istituzionale in gioco.

Bibliografia

Balacheff N., Sutherland R.
Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. *Int. J. of Computers for Mathematical Learning* 4: 1-26, 1999.

Brousseau G.
Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academics Publisher, 1997.

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 1999.

B. Kutzler
The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, 1999, Programma *e*Learning (2003).

3. Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico

Silvia Sbaragli
N.R.D. Bologna

«La paura dell'infinito è una forma di miopia che distrugge la possibilità di vedere l'infinito attuale, anche se questo nella sua forma più alta ci ha creati e ci mantiene, e nelle sue forme secondarie di transfinito è presente intorno a noi e popola persino le nostre menti».
(Cantor G., *Gesammelte Abhandlungen*, 1932)

Le riflessioni che seguiranno si riferiscono a un percorso di ricerca durato vari anni relativo all'infinito matematico; un argomento che ha rappresentato, e rappresenta tutt'ora, un tema affascinante che attrae molti studiosi di diverse discipline. In particolare, in àmbito matematico e in didattica della matematica, l'infinito è stato trattato in diversi modi, rivelandone i passaggi storici più delicati, gli *ostacoli epistemologici* (Brousseau, 1983, 1986; D'Amore 1999) specifici del concetto e le conseguenti difficoltà che incontrano gli studenti dei diversi livelli scolastici ad affrontare e a costruire questo argomento.

In questo lavoro di ricerca abbiamo scelto di muoverci in un'ottica nuova e appassionante all'interno della didattica della matematica che punta l'attenzione sulle convinzioni degli insegnanti nei riguardi dell'infinito matematico. Inizialmente abbiamo indagato sulle misconcezioni degli insegnanti di scuola primaria, sorrette da immagini mentali erronee che condizionano le loro convinzioni, di conseguenza il loro insegnamento; per poi puntare l'attenzione su quelle degli insegnanti di scuola secondaria inferiore, riscontrando come non vi sia una sostanziale differenza tra le false credenze rilevate negli insegnanti dei diversi ordini scolastici.

I risultati di ricerca mostrano come non vi sia alcuna conoscenza da parte degli insegnanti, di ciò che si intende per infinito matematico, sia epistemologicamente che cognitivamente, e questo deriva dal tipo di tematica, totalmente caratterizzata da ostacoli epistemologici, e dalla mancanza di uno studio specifico su questo argomento. L'infinito rappresenta un concetto sconosciuto gestito solo dall'intuizione e per questo ridotto banalmente ad un'estensione del finito; questo è causa di modelli intuitivi che costituiscono vere e proprie misconcezioni (D'Amore, 1999). Ossia gli insegnanti accettano la nozione euclidea: «*Il tutto è maggiore di ogni sua parte*» per il finito e tendono a considerarla vera anche per l'infinito, cadendo così nel misconcetto chiamato *dipendenza* (Arrigo e D'Amore, 1999, 2002), in base al quale vi sono più punti in un segmento più lungo rispetto ad uno più corto; misconcezione che deriva dal modello intuitivo di segmento concepito come una fitta «collana di perle» dove i punti sono concepiti come perline (Tall, 1980; Gimenez, 1990; Romero i Chesa e Azcárate Giménez, 1994; Arrigo e D'Amore, 1999, 2002). Questo fenomeno è rintracciabile non solo in àmbito geometrico, ma si parla anche di *dipendenza* della cardinalità dalla «grandezza» di insiemi numerici; ad esempio dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, si pensa che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi. Ma l'«essere sottoinsieme proprio» e «avere meno elementi» sono espressioni che non vanno confuse se si parla di insiemi infiniti.

Queste misconcezioni sono una diretta conseguenza del fatto che l'insegnante, soprattutto di scuola primaria, ha avuto durante la sua formazione solo continue conferme di quello che avviene nel finito e lo ha assunto come modello intuitivo assoluto e, come tale, proposto ai propri allievi. Ma la trattazione delle problematiche concernenti l'infinito richiede lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e a volte addirittura opposti rispetto a quelli che si usano nel finito.

Si è potuto così evidenziare come le grandi difficoltà riscontrate da parte degli studenti nella comprensione dell'infinito matematico non siano dovute solamente ad ostacoli epistemologici, ma rafforzate e amplificate anche da *ostacoli didattici* (Brousseau, 1983, 1986; D'Amore 1999) derivanti dai modelli intuitivi forniti dagli insegnanti ai propri allievi.

Per aggirare tali ostacoli occorre una maggiore formazione per gli insegnanti su questo tema, in modo da allontanare l'idea di infinito da un'impostazione puramente ed esclusivamente intuitiva. In effetti fino ad ora, questo tema è risultato troppo sottovalutato, soprattutto come argomento di formazione, ed è proprio da questa mancanza che, a nostro parere, derivano in parte le difficoltà degli studenti di scuola superiore che portano con sé convinzioni antecedenti non idonee ad affrontare le nuove situazioni cognitive. Questa formazione farà sì che gli insegnanti coinvolgano gli alunni in esperienze significative e in attività che permettano di costruire immagini intuitive coerenti con la teoria degli insiemi infiniti.

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...». Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494, 1999.

Arrigo G., D'Amore B.
«Lo vedo ma non ci credo...», seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57, 2002.

Brousseau G.
Ostacles Epistemologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 4, 2, 165-198, 1983.

Brousseau G.
Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115, 1986.

Cantor G.
Gesammelte Abhandlngen. Berlin: Springen-Verlag, 1932.

D'Amore B.
Elementi di Didattica della Matematica. Bologna: Pitagora, 1999. III ed. 2001.

Gimenez J.
About intuitional knowledge of density in Elementary School. *Atti del XIV PME.* Mexico. 19-26, 1990.

Romero i Chesa C., Azcárate Giménez C.
An inquiry into the concept images of the continuum. *Proceedings of the PME XVIII*. Lisboa. 185-192, 1994.

Sbaragli S.
Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* Prima parte: 26A, 2, 155-186. Seconda parte: 26A, 5. 573-588, 2003a.

Sbaragli S.
La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi àmbiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 47, 49-58, 2003b.

Tall D.
The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 271-284, 1980.

4. Da Programma a … Piano di formazione per la matematica nella scuola media ticinese

Aldo Frapolli, docente di Didattica della Matematica
presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno

Un curricolo scolastico – per settore o per materia e in ogni ordine di scuola – non può più limitarsi al tradizionale elenco di contenuti, anche se accompagnato da considerazioni sul metodo e sulla valutazione, come siamo stati abituati a vedere nei migliori programmi tradizionali che ci hanno accompagnati fino alla fine del secolo scorso.

Oggi, alla luce di importanti risultati della ricerca didattica, in particolare quella realtiva alla matematica, lo spazio riservato in tali documenti alla logica del «sapere disciplinare» e dunque implicitamente al problema dell'*insegnamento*, ci appare eccessivo e inadeguato.

Ci si è resi conto che è necessario occuparsi anche, maggiormente e in modo esplicito del versante dell'*apprendimento* o, in altri termini, di come l'allievo impara, tenuto conto delle sue caratteristiche personali e dell'ambiente in cui è inserito.

Così sempre più la didattica in generale e quella della matematica in particolare, si concentra sui processi di costruzione del sapere da parte dell'allievo, cercando di identificare sia le condizioni più adatte per ottenere un'apprendimento di migliore qualità sia gli ostacoli che vi si possono frapporre.

Accettando questa filosofia ci si accorge ben presto che al di là di nozioni e procedure da apprendere – i tradizionali saperi degli elenchi citati – esistono altri oggetti di apprendimento almeno altrettanto importanti.

Si vuole un allievo in grado *di apprendere con sempre maggior autonomia*, in condizione di costruirsi, a poco a poco, un *bagaglio di risorse personalizzato*, che superi il ruolo di diligente ascoltatore e riproduttore della conoscenza trasmessa dall'insegnante per divenire, entro ragionevoli limiti, responsabile e cosciente produttore di conoscenze rielaborate in proprio. Per raggiungere tale obiettivo si ritiene che ragionevolmente egli debba essere messo in condizione di impadronirsi a poco a poco della conoscenza, costruendola in prima persona, agendo il più possibile da protagonista e stimolato a riflettere su quanto fa.

Evidentemente l'allievo non può essere lasciato solo in un simile percorso. Dev'essere accompagnato da un docente il cui ruolo è profondamente mutato rispetto all'immagine tradizionale: non più unicamente depositario e trasmettitore di un bagaglio di conoscenze, bensì ideatore creativo e stimolatore di attività che permettano all'allievo di costruirsi un proprio bagaglio di competenze.

Per la definizione di un curricolo scolastico il cambiamento da *Programma* a *Piano di formazione* (PF) è da leggersi dunque come logica conseguenza dei sostanziali mutamenti in atto, caratterizzati sostanzialmente dai passaggi da *un elenco di conoscenze da trasmettere* a *un progetto di costruzione* centrato sui bisogni e le possibilità dell'allievo come pure da un modo di operare quasi esclusivamente centrato sui *problemi dell'insegnamento* ad uno maggiormente rivolto ai *processi dell'apprendimento*.

La struttura del Piano di formazione della matematica (PFM) è articolata su:

— un'***Introduzione***, con cenni sull'identità culturale e sulla valenza formativa della matematica;
— la ***Mappa formativa della matematica***, che risponde alla domanda centrale del Piano di formazione: *come si intendono coniugare i bisogni dell'allievo con le aspettative della società?*
— gli *Orientamenti didattici disciplinari*, con gli aspetti metodologici e i contenuti dell'insegnamento;
— le ***Competenze e le Risorse disciplinari per classe.***

Il nucleo del PFM è indubbiamente costituito dalla ***Mappa formativa disciplinare di matematica***.

Essa si presenta sottoforma di tavola bidimensionale costituita di 9 caselle…

		Bisogni degli allievi		
		IMPARARE A ...		
		Conoscere	**Fare**	**Essere**
Scopi della scuola sulla base della domanda sociale	**Formazione culturale**	**1.1) Pensiero fondato sulla razionalità, internamente coerente e in continua evoluzione. Un sapere aggiornato e ordinato. Un sapere interrogativo e creativo**	**2.1) Pensare e ragionare. Apprendere. Utilizzare procedure, metodi e strategie. Tradurre situazioni in termini matematici e viceversa. Uitilzzare, trasporre la conoscenza e agire**	**3.1) Fare propri e condividere valori della pratica matematica. Far crescere e approfondire il rapporto con la realtà. Sviluppare i convincimenti personali.**
	Formazione umana	**1.2) Aspetti di storia della matematica. La dimensione etica. Il contributo della matematica per un uso corretto della conoscenza. Valore e limiti del pensiero razionale**	**2.2) Riflettere e giudicare (in ottica sia deterministica sia probalistica). Contestualizzare.**	**3.2) Sviluppare il senso di responsabilità. Sviluppare il piacere di vivere e la valorizzazione dei sentimenti. Sviluppare la fiducia in sé e la consapevolezza delle proprie risorse e dei propri limiti.**
	Formazione sociale	**1.3) I contributi di altre società e culture al nostro contesto matematico. L'universalità del linguaggio matematico. Il contributo della mate nella strutturazione degli organismi istituzionali. La comunicazione.**	**2.3) Partecipare. Gestire e organizzare il lavoro. Ricercare, selezionare e utilizzare l'informazione.**	**3.3) Promuovere l'apprezzamento delle ragioni e delle esperienze altrui. Sviluppare disponibilità e capacità relazionali, un rapporto responsabile con le istituzioni, il senso di appartenenza.**

… e permette di descrivere sinteticamente la complessa struttura a rete che caratterizza l'insieme delle finalità (formativa del pensiero, applicativa-utilitaristica, culturale e sociopsicologica) che si intendono perseguire con l'insegnamento della matematica in risposta alla domanda centrale del PF.

In essa i bisogni dell'allievo, in cui i tradizionali saperi (conoscenze) vengono completati con obiettivi dei tipi «saper fare» (capacità) e «saper essere» (atteggiamenti), sono coniugati con le esigenze della domanda sociale espresse in termini di «formazione culturale», formazione umana» e «formazione sociale».

Osservando la «struttura a cipolla a tre strati» della Mappa formativa è possibile cogliere anche una dimensione storico-evolutiva del concetto di «Programma». Si parte dai «vecchi programmi» anni '60, centrati sul sapere disciplinare (1.1) per passare dai «programmi rinnovati» degli anni '80, in cui l'attenzione inizia a spostarsi sui processi di apprendimento e appaiono esplicitamente finalità legate alla capacità di fare (1.2 – 2.1). Si giunge ai «nuovi programmi», o «piani di formazione» come sono stati definiti, nei quali importanti componenti legate agli atteggiamenti e alla richiesta sociale – spesso date per implicite fra le righe dei citatielenchi di contenuti – assurgono esplicitamente ad elementi costitutivi della formazione (1.3 – 3.1).

Gli ***Orientamenti didattici disciplinari*** presentano i principi che reggono le scelte metodologiche e contenutistiche adottate per realizzare le finalità del PFM. Ciò dovrebbe avvenire attraverso un'opera di problematizzazione dei concetti, di ricerca e di organizzazione delle conoscenze centrata sull'allievo che dev'essere messo in condizione di **costruirsi** il proprio sapere. Metodologicamente ciò è possibile coinvolgendo l'allievo in **situazioni didattiche** stimolanti che gli permettano di giungere ad un primo stadio di apprendimento mediante un processo di **concettualizzazione** reso possibile da una messa in comune delle conoscenze dei diversi allievi della classe e dall'intervento **regolatore** e **validante** dell'insegnante. Questi momenti di avvicinamento a nuove conoscenze vanno poi integrati con attività di **consolidamento**, di **applicazione** e di **approfondimento**.

In tale ottica il baricentro dell'apprendimento è stato posto sulla capacità di risolvere problemi. A questo scopo parte delle ore di matematica lungo i quattro anni della scuola media vanno dedicate a lavori di **laboratorio matematico**.

L'indispensabile impianto contenutistico sul quale svolgere l'attività didattica si articola su cinque campi di studio: *Numeri*, *Insiemi, funzioni e rappresentazioni grafiche*, *Geometria, Matematica applicata*, *Formazione del pensiero.*

I «rami secchi» della matematica sono stati potati per far spazio, in particolare, all'educazione al **pensiero probabilistico** e all'introduzione all'**elaborazione matematica di dati statistici**; particolare attenzione è stata rivolta anche alla problematica del calcolo, visto alla luce delle implicazioni dei nuovi mezzi tecnologici.

L'ultimo capitolo offre al docente una paletta di strumenti concreti per orientare il proprio insegnamento, costituita da ***Le Competenze e le Risorse disciplinari per classe***, quest'ultime coniugate sottoforma di obiettivi specifici e classificati per campo di studio.

Le competenze integrano insiemi di obiettivi relativi ad un determinato nucleo fondante, concernenti saperi, saper fare e saper essere; sono riferite a una «famiglia di situazioni», all'interno della quale il docente può scegliere di volta in volta quella particolare che meglio si adatta all'apprendimento dei propri alunni. Le competenze per classe sono apprendimenti che vanno terminati in quell'anno e rappresentano lo zoccolo duro attorno al quale viene organizzata l'attività didattica annuale.

Quest'ultima non deve tuttavia limitarsi al lavoro sulle competenze ma dev'essere estesa anche agli altri obiettivi-risorse disciplinari che costituiscono un importante bagaglio formativo e culturale, indispensabile per raggiungere competenze successive.

5. I miei primi contatti con la ricerca in didattica della matematica

Alberto Piatti, Docente presso la Scuola Universitaria Professionale della Svizzera Italiana (SUPSI), docente e dottorando presso l'Università della Svizzera Italiana (USI)

La didattica della matematica è una disciplina che nasce spontanea nel momento in cui si è confrontati contemporaneamente con problemi matematici ed epistemologici da una parte e problemi di insegnamento della matematica dall'altra. Professionalmente mi sono trovato a dover insegnare concetti matematici sui cui fondamenti io stesso avevo dei ragionevoli dubbi e questo mi ha spinto, grazie anche all'incontro con il didatta della matematica Gianfranco Arrigo, verso la ricerca in didattica della matematica, ricerca a cui mi dedico dal 2002. I problemi che finora ho indagato hanno tutti a che fare con concetti problematici dal punto di vista epistemologico. Mi sono occupato in primo luogo del concetto di infinito partecipando a una ricerca congiunta promossa da Bruno D'Amore, mi sono quindi chinato in modo particolare sull'insegnamento dei numeri razionali e reali e attualmente mi sto dedicando, insieme ad Arrigo, a una ricerca sull'insegnamento della probabilità. La ricerca sull'insegnamento della probabilità è nata nel momento in cui mi sono trovato confrontato nelle mie ricerche nell'ambito del dottorato con dei problemi epistemologici che avevo constatato, in altra forma, in classe quando insegnavo in una scuola media. Nel mio dottorato lavoro con modelli tratti dal campo delle probabilità imprecise, ossia modelli probabilistici che non fanno uso di probabilità espresse in maniera precisa come nei modelli classici ma di altri strumenti come ad esempio intervalli di probabilità, insiemi di distribuzioni di probabilità, belief functions, ecc. Tutti questi strumenti sono stati sviluppati per permettere di modellare in maniera realistica fenomeni di cui non abbiamo conoscenza completa e che, modellati con probabilità precise, richiedono ipotesi assolutamente arbitrarie. Ebbene: il problema riscontrato in classe concerneva proprio problemi probabilistici in cui si proponevano probabilità precise senza giustificare la loro costruzione. In generale nell'insegnamento ci si trova spesso a dover commettere arbitrii per poter spiegare concetti: esattamente ciò che succedeva in probabilità prima dell'avvento delle probabilità imprecise. Trovarmi confrontato con entrambi i problemi contemporaneamente mi ha portato ad elaborare un progetto di ricerca didattica in cui voglio utilizzare gli strumenti della probabilità imprecisa per tentare di risolvere i problemi didattici legati al concetto di probabilità.

6. Atolli matematici

Giorgio Mainini, già direttore di scuola media e docente di matematica

Disse una volta Georges Papy: «Les mathématiques on ne les enseigne pas: on les apprend».

Mi piace precisare il concetto: «La matematica non si insegna: la si impara **facendola**».

Il neretto è importante: come la si potrebbe imparare in altro modo, se non la si può insegnare?

Eppure l'abbiamo sempre insegnata. Il fatto è che, fuori dagli ambienti strettamente dedicati, la matematica soffre di cattiva nomea... Come mai, se noi la troviamo interessante?

D'altra parte, che cosa possiamo proporre agli allievi, perché possano **fare** matematica?

Per rispondere, proporrò alcuni esempi, presi uno dalla scuola elementare, l'altro dalla media, il terzo dalle medie superiori (scusandomi subito per le eventuali esagerazioni).

Dalla scuola elementare

Si fa matematica quando si insegna l'algoritmo noto come «moltiplicazione in colonna»?

Basta chiedere a chiunque lo sappia eseguire (purché non addetto ai lavori) perché funziona.

Perché si comincia «da destra»? Perché bisogna «spostarsi a sinistra» ad ogni riga successiva?

Ma queste, tutto sommato, sono domande «tecniche». Ben pochi sanno come funziona il cambio automatico di un'automobile: lo fanno funzionare e, salvo guasti, funziona sempre. Non si può dire altrettanto della moltiplicazione in colonna: per riprendere l'esempio, con l'algoritmo si «gratta» spesso. Perché anche un piccolo errore (il classico $6 \cdot 9=56$, che tanto assomiglia a $7 \cdot 8=54$) viene riportato a sinistra, moltiplicandolo ogni volta per 10. Molto più interessante, comprensibile ed affidabile (e che «non esce mai dal foglio») è il «metodo per gelosia» che, chissà come mai, è, se tutto va bene, relegato fra le curiosità. Sostengo che l'incomprensibilità (meglio: la non perspicuità) della «matematica» insegnata è alla base della nomea di cui sopra. Si noti, inoltre, che qualsiasi algoritmo per la moltiplicazione ha senso solo se i fattori sono parecchio grandi: fino a, diciamo, 93·78 sarebbe decisamente meglio *stimare* che farà qualcosa nei paraggi di 90·80 cioè di 9·8 «con due zeri dietro». D'altra parte, le pile delle macchinette, di fatto, non si scaricano mai…

Non si fa forse più matematica quando si chiede ad un allievo, che dovesse possedere quattro maglioni e cinque paia di pantaloni, in quanti modi diversi può vestirsi? O quando gli si chiede che ora sarà quando saranno passate sette volte quattro ore?

Dalla scuola media

Un gran classico è il teorema di Pitagora, che per gli allievi è «teorema» per modo di dire, visto che non lo si dimostra (più). Poi via, con altezze di triangoli isosceli, diagonali di parallelogrammi, scale appoggiate al muro. Non nego l'importanza del teorema di Pitagora: affermo che viene spesso ridotto a ricetta per cucinare cibi che nessuno desidera. Eppure, quanto pensiero gli sta dietro: fosse solo l'irrazionalità della radice di due. Insomma: si adopera un «oggetto trovato» (da altri, chissà come, chissà perché) per risolvere problemi che, tutto sommato, non interessano. La non perspicuità della matematica continua. E dire che la stessa cultura, che il teorema di Pitagora ha dimostrato, ha prodotto anche idee quali i numeri primi, i numeri perfetti, i numeri amicabili, i numeri figurati e un mare di altri oggetti simili. Cercare numeri perfetti, ad esempio, è un'attività che fa lavorare il cervello ben di più che non scomporre in fattori primi 187. Perché, a priori, non si sa dove cercarli. Bisogna preparare un piano d'attacco, una strategia: bisogna, davvero, pensarci su.

Dalle scuole medio superiori

Quale delle seguenti affermazioni è un teorema?

a) «Se una funzione f è crescente nell'intervallo $[a,b]$ e se ($f(a)<0$ e $f(b)>0$), allora esiste un x_0, $a<x_0<b$, per il quale $f(x_0)=0$»;
b) «Esistono due punti sull'equatore terrestre, diametralmente opposti, sui quali grava esattamente la stessa pressione atmosferica»;
c) «In Ticino esistono almeno due persone che hanno in testa esattamente lo stesso numero di capelli (escludiamo pure i calvi…)».

Non lo è a): manca una condizione. Ma quanti allievi si sono realmente accorti dell'importanza della condizione qui tralasciata? La continuità ci vuole «perché l'ha detto il sore».

Può esserlo b) se la pressione atmosferica è descritta da una funzione continua. Lo è? Non lo è? Perché? Un modello che la consideri continua è accettabile?

Lo è c): ma è un teorema matematico?

Riassumendo

Nessuno sa la matematica: al massimo ne sa un po'. Contrariamente a quanto si vuol far credere, la matematica non è qualcosa dove tutto discende da principi accettati una volta per tutte. È un arcipelago di teorie, coerenti (si spera) al loro interno, ma correlate fra loro solo dalla convenzione di considerarle «matematiche». Da qui il titolo di «Atolli matematici» di questo contributo. Alcuni docenti, fra i quali il sottoscritto, ritengono che di questo fatto bisogna tener conto nell'insegnamento: mettiamo gli allievi in situazioni stimolanti e facciamo in modo che «ci lavorino su». Che «facciano» matematica. Che si rendano conto che i testi di matematica, quelli per le scuole e quelli per specialisti, sono autentici «falsi in atto pubblico». Chi, anche una sola volta in vita sua, ha dimostrato un teorema (magari già dimostrato duemila anni fa, ma della cui esistenza non era al corrente), si sarà reso conto che si avanza «a pendolo»: si intuisce qualcosa e la si dà per buona, la si adopera per avanzare e scoprire qualcosa d'altro, si torna indietro per dimostrarla, si scopre che non era vera, si ricomincia, eccetera. Poi, per la pubblicazione, si nascondono i vicoli ciechi e si dispone il tutto come un gorgogliante ruscello che nasce lassù e che si ingrossa in un imponente fiume. E l'allievo dirà: «Ma come diavolo avrà mai fatto ad avere sempre a disposizione l'affermazione giusta al momento giusto? Io non ce la farò mai. Tanto vale lasciar perdere».

Ed è un peccato, non solo per noi che amiamo la nostra disciplina, ma per la società tutta, che non capisce più sé stessa, tanto fondata sulla matematica e le sue applicazioni.

7. Il ruolo della SSIMF nello Stato federale

Claudio Beretta, presidente della SSIMF,
già direttore di liceo e docente di matematica

La Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica ha voluto onorare i suoi cento anni di esistenza varando i nuovi statuti che hanno costituito non solo un aggiornamento degli stessi, ma che hanno anche permesso di ufficializzare la creazione della Commissione di Matematica della Svizzera Italiana.

La nostra società, fondata appunto nel lontano 1903, non ha mai abbandonato le finalità che le diedero i fondatori, ossia la redazione di libri di testo e formulari, l'organizzazione di incontri di aggiornamento disciplinare e metodologico, la pubblicazione dei testi delle maturità svizzere e degli esami d'entrata alle Scuole Politecniche.

Queste attività ebbero sempre l'appoggio dei cantoni e della Centrale della formazione continua di Lucerna.

Diversi docenti ticinesi fecero parte delle commissioni romande o svizzero tedesche e molti parteciparono alle settimane di studio organizzate dalle stesse.

Basti pensare, più recentemente, ai dodici Forum svizzeri sulla matematica di cui tre organizzati in Ticino che si svolsero dal 1976 al 1989, dedicati al coordinamento dell'insegnamento della matematica nel settore scolastico medio.

Furono toccati diversi temi, quali:

- la presentazione di capitoli (frazioni, funzioni, statistica e probabilità);
- le finalità dell'insegnamento della matematica;
- la matematica nella scuola professionale;
- la comprensione linguistica dei problemi;
- la valutazione dell'allievo nel rinnovato insegnamento della matematica.

Furono promossi anche gruppi di lavoro aventi il compito di redigere i piani quadro per la nuova maturità e attualmente di partecipare alle continue consultazioni sottoposte dal Dipartimento Federale degli Interni, per citare le ultime:

- le raccomandazioni relative alla formazione continua degli insegnanti e il regolamento concernente il riconoscimento dei diplomi o dei certificati di formazione continua e complementare riguardanti l'insegnamento;

- le raccomandazioni della Conferenza svizzera dei Direttori dei Dipartimenti dell'Educazione concernenti l'autovalutazione nelle scuole, l'integrazione delle scuole sanitarie, l'introduzione dei bachelor e master nelle alte scuole.

Ci furono ogni anno corsi dedicati ad approfondimenti per i docenti liceali corsi organizzati dalle singole commissioni.

Questi momenti rivestono a mio modo di vedere una notevole importanza perché ci confrontiamo con altri colleghi e in particolare con gli utenti dei testi redatti dalle commissioni.

Ma guardiamo un po' più da vicino: la Commissione di Matematica della Svizzera Italiana mira al rinnovamento dell'insegnamento della matematica a livello liceale e al perfezionamento della sua didattica. Lo fa mediante l'organizzazione di serate o corsi d'aggiornamento, conferenze o seminari e prossimamente con la produzione di materiali didattici. Essa comprende rappresentanti di tutti i licei ticinesi e del Collegio Papio nonché dell'Università della Svizzera italiana e dell'Alta Scuola Pedagogica.

Ha appena aperto un suo sito internet, collabora alla redazione del bollettino della SSIMF e partecipa alle consultazioni, recentemente a quella sulla riforma 3 della scuola media con un atteggiamento di critica costruttiva.

La commissione romanda e quella svizzero tedesca di matematica oltre che aver redatto i formulari utilizzati largamente nelle scuole svizzere, pubblica libri di testo e di esercizi che ricoprono tutti gli argomenti dello studio liceale (per la Commissione romanda si fa riferimento alla collana Fondamentum).

Ora, dopo aver pubblicato delle monografie su capitoli scelti, quali i metodi numerici, la probabilità e la statistica, sono usciti ultimamente dei quaderni dedicati alla fisica e all'applicazione della matematica alla fisica.

Per la fisica, la commissione tedesca ha organizzato serate dedicate all'astronomia, ha appena pubblicato «Physik anwenden und verstehen» e sta preparando il Congresso svizzero del 2005.

I colleghi romandi hanno redatto un testo sulla fisica nucleare e ne hanno in cantiere altri che saranno pronti l'anno prossimo (uno sulle onde, l'altro sulla meccanica).

Queste vasta gamma di proposte e iniziative permettono ai docenti di operare scelte qualitative che consentono di evitare la staticità dell'insegnamento, a tutto vantaggio della formazione dei nostri giovani che si avviano agli studi post-liceali.

Le auorità dovrebbero essere coscienti che, senza questo impegnativo qualificato e qualificante lavoro, il livello dell'insegnamento della matematica subirebbe un sensibile abbassamento e ciò a danno dell'avvenire dei nostri giovani e del cantone.

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Stampa:
Lineagrafica