Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Conferenze di
- Giorgio Bolondi, Università di Bologna, Italia
- Vicenç Font, Università di Barcellona, Spagna
- Juan D. Godino, Università di Granada, Spagna; Mauro Rivas, Università di Los Andes, Venezuela; Walter F. Castro, Università di Antioquia, Colombia; Patricia Konic, Università di Rio Cuarto, Argentina
- Claire Margolinas, Università di Clermont-Ferrand, Francia
- Gerd Schubring, Università di Bielefeld, Germania
- Gérard Vergnaud, Università di Paris 8, Francia

ISBN 88-86486-61-8
Fr. 20.–

Repubblica e Cantone Ticino
Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport

Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Quaderni
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale

QASP

A cura di Gianfranco Arrigo

Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Quaderni
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale

Quaderni per l'insegnamento
Alta Scuola Pedagogica

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport

ISBN 88-86486-61-8

A cura di Gianfranco Arrigo

Atti del Convegno di didattica della matematica 2008

Quaderni per l'insegnamento
Alta Scuola Pedagogica

Centro
didattico cantonale

Indice

Prefazione

Anno 2008. Il 3° Convegno di Didattica della Matematica di Locarno, organizzato dall'Alta Scuola Pedagogica, nel magnifico chiostro dell'antico convento annesso alla chiesa di San Francesco, è una realtà. Il discorso sulla teoria didattica iniziato a Bellinzona con la manifestazione Matematica 2000, in occasione dell'anno della matematica, è stato ripreso una prima volta a Locarno nel 2004 e continua oggi sulla scorta della profondità delle riflessioni innescate. Propone una nuova ventata di ossigeno grazie alla presenza di relatori di fama scelti accuratamente, grazie anche alla preziosa collaborazione dei professori Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandino Pinilla.

Il Ticino è un piccolo mondo, ma anche una realtà essenziale nel panorama culturale svizzero. La scuola ticinese vi appartiene di diritto ed è sempre stata consapevole del fatto che, in quanto scuola di una minoranza, non può essere inferiore né a quella di cultura tedesca né a quella romanda. Questa nostra peculiarità è sempre stata stimolo fondamentale per la promozione di una scuola di qualità: il passato ce lo insegna. In tempi difficili e disseminati di sfide come quelli che stiamo vivendo, è necessario trovare la forza di continuare e il coraggio di operare senza lasciarsi troppo condizionare dalle difficoltà quotidiane. Forza, coraggio, determinazione, caparbietà sono abiti mentali che l'insegnante sa vestire soprattutto se la sua prassi didattica è ben fondata teoricamente. II convegno di didattica si prefigge di mantenere alto l'interesse nei confronti dei principali problemi che si pongono nel delicato e meraviglioso processo di insegnamento-apprendimento. Per farlo è importante stabilire e mantenere un collegamento diretto tra la ricerca didattica attuale e la pratica in classe. Ecco perché il Canton Ticino è orgoglioso di accogliere in questi due giorni, a Locarno, sede dell'Atta Scuola Pedagogica, alcuni fra i più autorevoli didatti della matematica del mondo intero.

1. Immagini dei numeri

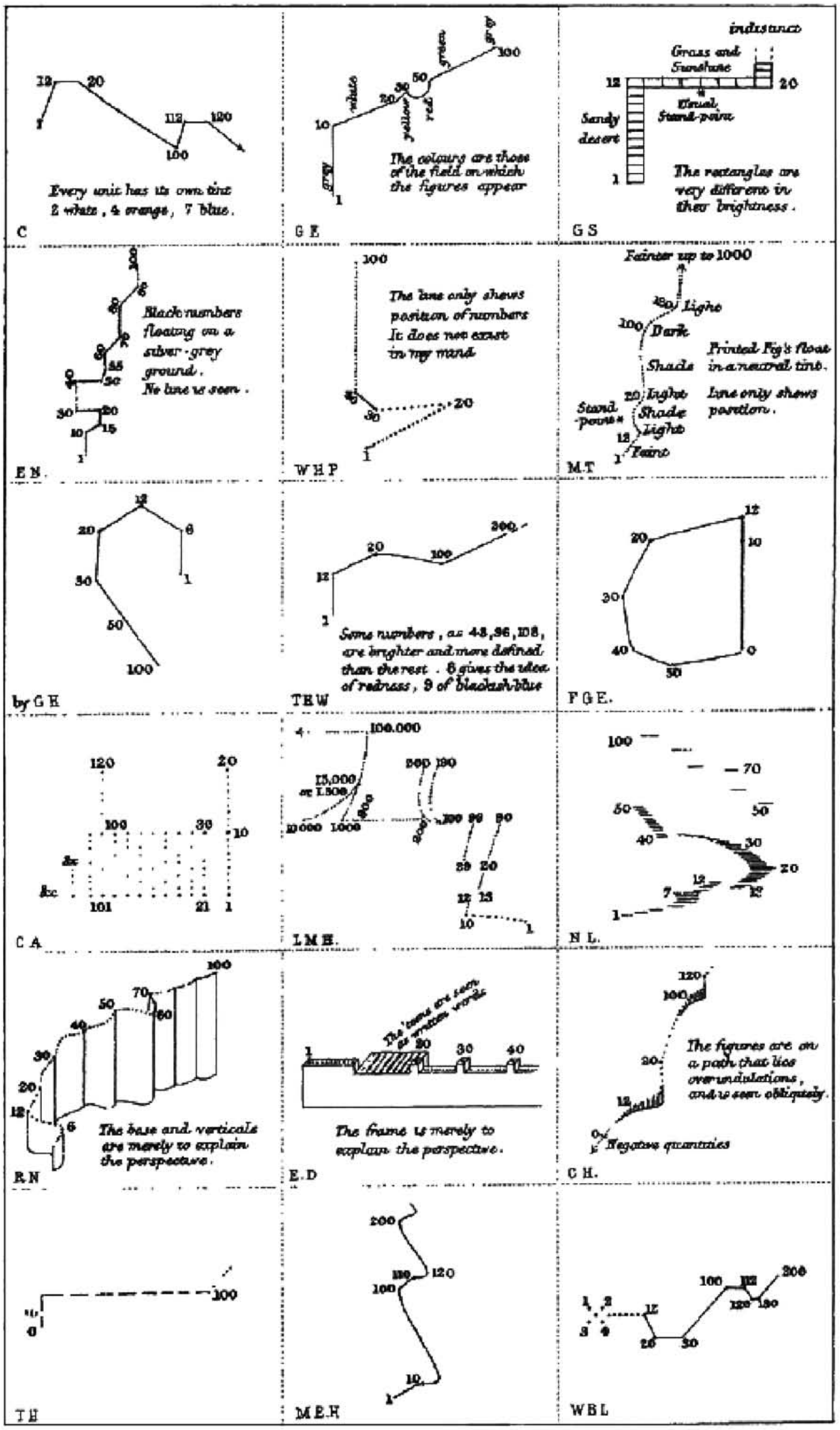
Giorgio Bolondi[1]

The article deals with the topic of forms that numeral line can assume in mental visualisations of people. They play an important role in many mnemonic tasks and in mental computations. Children start already from the first class of primary school to construct a numerical line that contributes to model a mental picture with the spatial features of the set of natural numbers; this line gets step by step more "crowded" with more "inhabitants", and it becomes gradually longer. Then, suddenly, it has to turn into a continuum – this cannot happen without backlashes and difficulties.

È stato sir Francis Galton, lo scienziato vittoriano secondo cugino di Charles Darwin, fondatore della psicometria, pioniere della meteorologia scientifica, statistico (è sua l'idea di *correlazione*) il primo a cercare di studiare le forme che la linea dei numeri può assumere nelle visualizzazioni mentali delle persone (*…the various ways in which numerals are visualized…* dove *visualization* è, per Galton, *…the power of seeing images in their mind's eye*). Secondo i dati raccolti da Galton (testimonianze verbali o scritte), queste forme sono associate anche a particolari colori o altre caratteristiche, ma soprattutto (e questo dal nostro punto di vista è particolarmente stimolante) servono anche da supporto (o da sfondo) a operazioni di vario tipo, incluse quelle aritmetiche. Giocano un ruolo importante, nelle persone che le hanno particolarmente sviluppate (secondo Galton, si tratta di circa un maschio su trenta e una femmina su quindici), in molti compiti di tipo mnemonico e nel calcolo mentale. Le esperienze che influenzano il formarsi di questo tipo di immagini e la capacità di farle intervenire in modo più o meno consapevole nell'esecuzione di procedure o operazioni di varia natura sono individuate da Galton nella lettura dell'orologio e nella struttura linguistica delle parole-numero. Ovviamente, molte delle affermazioni dello scienziato ottocentesco oggi appaiono ingenue, altre contraddette da successive osservazioni, alcune viziate da pregiudiziali ideologiche di varia natura. Cionondimeno alcune delle sue considerazioni sono confrontabili con quanto osserviamo nei nostri allievi e possono darci stimoli interessanti[2].

Alcune somiglianze superficiali sono quanto meno suggestive: ad esempio, quando confrontiamo la rappresentazione dell'immagine di *C.* (o anche di *G.H.*) nella tavola della pagina seguente, con quanto dice *M.*, bambino di 7 anni di Trento, rispondendo alla domanda *Come ti immagini la fila dei numeri?*

1. Università degli Studi di Bologna.
2. Questa ricerca era stata condotta senza avere presente il lavoro di Galton; si tenga inoltre presente che il ruolo particolare del numero «12» per gli anglofoni dipende da fattori linguistici, il cui analogo nella lingua italiana è riscontrabile nel passaggio del «10»).


Every unit has its own tint
2 white, 4 orange, 7 blue.
C
The colours are those
of the field on which
the figures appear
G E
indistinct
Grass and
Sunshine
Sandy
desert
The rectangles are
very different in
their brightness.
G S
Black numbers
floating on a
silver-grey
ground.
No line is seen.
E N.
The line only shows
position of numbers
It does not exist
in my mind
W H P
Fainter up to 1000
Printed Fig's float
in a neutral tint.
Line only shows
position.
M.T
by G H
Some numbers, as 48, 96, 108,
are brighter and more defined
than the rest. 6 gives the idea
of redness, 9 of blackish blue
T H W
F G E.
C A
L M H.
N L.
The base and verticals
are merely to explain
the perspective.
R N
The frame is merely to
explain the perspective.
E.D
The figures are on
a path that lies
over undulations,
and is seen obliquely.
Negative quantities
C H.
T H
M E H
W B L

M.: *Io vedo come una salita fino al dieci, poi un po' di pianura e poi una discesa fino al cento.*

Un'altra analogia è tra quanto dice F., una bimba di otto anni, e alcune delle immagini descritte da Galton:

F.: *Non so perché, ma mi sembra che i numeri diventano più fitti quando diventano grandi.*

In alcuni bambini la prossimità spaziale dei numeri dipende non solo dall'essere vicini nella sequenza, ma anche da fattori legati alla scrittura: per M. (otto anni) *sono vicini anche numeri come ventuno, trentuno, quarantuno,* come se ci fosse una sorta di struttura *a spirale*.

L'approccio di Galton è stato ripreso, recentemente, da alcuni ricercatori di ambito neuropsicologico-cognitivista, che con i loro strumenti cercano di investigare come vengono «immaginate» le sequenze ordinate, non necessariamente di numerali. Abbiamo così analisi in termini di tempo-risposta, di number processing, di performance di calcolo, di lesioni cerebrali (Dehaene et al., Seron et al., Zorzi et al., e molti altri studi collegati). Dal punto di vista della didattica della matematica, queste osservazioni ci portano a porre due questioni:

1. Ci sono approcci didattici che favoriscano la formazione e l'imporsi di una rappresentazione con determinate caratteristiche?
2. In quali forme queste immagini influenzano gli apprendimenti successivi, in particolare quelli relativi agli ampliamenti del sistema dei numeri?

La risposta alla prima domanda è ovviamente positiva. La *linea dei numeri* è uno strumento molto usato, e il numero di bambini che afferma di avere in testa una immagine regolare, rettilinea, della sequenza dei numeri, con i naturali equidistanti, è decisamente maggiore di quanto sembra affermare Galton. Per quanto riguarda la seconda domanda, non c'è dubbio che l'introduzione dei numeri negativi si può avvantaggiare dall'avere, i bambini, una immagine anche intuitiva della disposizione dei numeri naturali su una semiretta. Ovviamente, anche l'introduzione delle frazioni si innesta in modo naturale sulla linea dei numeri, permettendo in particolare di gestire il problema dell'equivalenza delle frazioni. La linea dei numeri, che per i numeri naturali permette di «visualizzare» il significato ordinale, con le frazioni facilita l'acquisizione dell'ulteriore significato di numero come misura, un passaggio decisivo per l'introduzione dei numeri reali.

Il problema cruciale, in questo caso, è la questione del *continuo*, con tutti gli ostacoli epistemologici ad esso collegati. Per affrontare il continuo, è necessario gestire i numeri anche sotto l'aspetto estensionale. Ne erano ben consapevoli i matematici che risolsero il problema della sistemazione rigorosa dei numeri reali, Dedekind e Meray in testa.

Per arrivare a una immagine corretta e coerente dei numeri reali è necessario passare per una immagine del continuo, e questa richiede una immagine dei numeri che abbia proprietà di estensionalità. Il problema è che la linea dei numeri, nei ragazzi più grandi, è ormai troppo debole per supportare questo nuovo, cruciale arricchimento.

Innanzitutto, è ben noto, molti ragazzi confondono *continuità* con *densità*. Sono in buona compagnia, perché questo punto era uno scoglio anche per Galileo e per Leibniz.

È stato Dedekind a chiarire definitivamente e in modo semplice questo punto. Per Dedekind è evidente che il nodo che sta dietro alla definizione dei reali è il continuo, e questo può essere affrontato con considerazioni di tipo estensionale. In un celebre passaggio dice:

La maggior parte dei miei lettori proverà una grande disillusione nell'apprendere che è questa banalità che deve svelare il mistero della continuità... Che ognuno trovi il principio enunciato tanto evidente e concordante con la sua propria rappresentazione della retta – ciò mi soddisfa al massimo grado – perché né a me né ad altri è possibile dare di questo principio una dimostrazione qualsiasi. La proprietà della retta espressa da questo principio non è che un assioma...

Il «principio enunciato» è il famoso

Se una partizione di tutti i punti della retta in due classi è di tale natura che ogni punto di una delle due classi sta a sinistra di ogni punti dell'altra, allora esiste uno e un solo punto dal quale questa ripartizione di tutti i punti in due classi, o questa decomposizione della retta in due parti, è prodotta.

Il percorso di Dedekind verso i reali è modellato sull'immagine della retta (in cui c'è una *sinistra!*), al punto che la continuità è una proprietà estensionale di insiemi non necessariamente esplicitamente numerici (possiamo pensarla per le intensità della luce, o per le altezze dei suoni...).

Anche la definizione di Cantor-Méray, attraverso le successioni di Cauchy, per via diversa si appoggia su una immagine con caratteristiche di estensionalità della sequenza dei numeri (questa volta, con maggiore enfasi sul dato locale).

In sintesi, i nostri bambini iniziano fin dalla prima classe della scuola primaria a costruire una linea dei numeri, che contribuisce a plasmare una immagine mentale con caratteristiche spaziali dell'insieme dei numeri naturali; questa linea si popola via via di nuovi abitanti e si allunga sempre di più, che arrivano alla spicciolata. Poi, di colpo deve diventare un continuo senza buchi, questo non può avvenire senza contraccolpi e difficoltà. Claudia Berti, riprendendo studi di J.Robinet, ha documentato come sia forte l'immagine di una retta reale che, «ingrandita al microscopio elettronico», rivela una struttura corpuscolare. Molte delle difficoltà degli studenti nel calcolo differenziale discendono da una inadeguata immagine della continuità dei numeri reali, e da misconcezioni relative al continuo. Noi pensiamo che un lavoro sulla linea dei numeri condotto in maniera coerente su più livelli scolastici e trasversalmente a diversi apprendimenti (sia di natura operatoria che concettuale) possa aiutare nel superamento di queste difficoltà.

Bibliografia

Berti C. (2001). *Numeri reali e loro apprendimento: indagine sperimentale sui processi cognitivi, le immagini mentali e gli ostacoli epistemologici coinvolti*. Trento.

Dedekind R. (1926). *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali,* trad. O. Zariski. Roma.

Galton F. (1880). Visualized numerals. *Nature*, Jan 15, p. 252-256.

Robinet J. (1986). Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Educational studies in Mathematics*, vol. 17, p. 356-386.

2. Rappresentazioni attivate nel calcolo della derivata di una funzione

Vicenç Font[1]

The interest of finding alternative definitions of the derivative that do not involve a limit leads to the following question: how can we calculate f'(x) starting from f(x)? To answer this question we should take into consideration the representations of f(x) and f'(x) activated during the calculation of the derivative, but we should also consider other aspects, like the duality particular-general and the metaphors used by teacher and pupils in the discussions during the classes.

1. Il calcolo di *f'(x)* senza utilizzare la definizione per mezzo dei limiti

I concetti di derivata in un punto e di funzione derivata sono tradizionalmente difficili da comprendere per molti allievi di liceo. Le difficoltà si incontrano soprattutto nelle definizioni di questi concetti che utilizzano i limiti e non tanto nell'applicazione delle regole formali o nell'uso di formule. La seguente conversazione svoltasi in un'aula scolastica è un buon esempio di questa difficoltà:

Dialogo 1[2]

Dopo che l'insegnante ha introdotto nelle lezioni precedenti la derivata in un punto come

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e subito dopo che la definizione della funzione derivata è stata presentata come

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si è svolto il seguente dialogo:

Alunna (Laura): Che differenza c'è tra la definizione di funzione derivata e la definizione di derivata in un punto?

Professore: La derivata in un punto è:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1. Università di Barcellona.
2. Per maggiori dettagli vedere Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005).

in questa espressione la *a* è fissa, non varia, ciò che varia è la *h*. Per contro, nel caso della funzione derivata

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

prima devi considerare la *x* come fissa e la *h* come variabile per ottenere *f'(x)*, poi devi considerare la *x* come variabile. Pertanto, quando calcoli la derivata in un punto il risultato è un numero, mentre quando calcoli la funzione derivata il risultato è una formula di una funzione.

D'altra parte, la difficoltà incontrata nella comprensione di questi concetti aumenta quando la spiegazione del libro di testo non è tanto chiara quanto sarebbe auspicabile. Per esempio:

Testo 1[3]

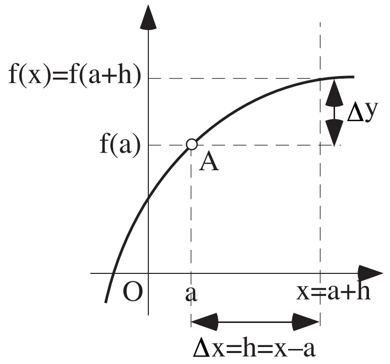


Fig. 7. $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ in x = a

Derivata di una funzione in un punto

Il tasso di variazione di una funzione y=f(x) in un punto x=a, che si è studiato nel paragrafo precedente, si chiama derivata della funzione y=f(x) nel punto x=a e si rappresenta con f'(a) (fig. 7)

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{\text{in } x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

3. Per maggiori dettagli confrontare con Inglada y Font (2003).

Testo 2[4]

Definizione della funzione derivata

Se y=f(x) è una funzione con x variabile indipendente, la derivata di y rispetto a x è così definita:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

In questa definizione, x rimane fisso, mentre Δx tende a zero. Se il limite non esiste per un valore particolare x, la funzione non ha derivata per questo valore.

Si usa indicare la derivata della funzione y=f(x) con f'(x) oppure y', o $D_x(y)$, o $D_x f(x)$. Nel nostro testo useremo y' o f'(x).

Ogni modo diverso di introdurre la funzione derivata in un processo di insegnamento-apprendimento implica una determinata complessità semiotica. Non presenta la stessa complessità semiotica dare la definizione attraverso i limiti o, per esempio, incominciare col determinare una funzione derivata particolare (per esempio la derivata della funzione $f(x) = x^2$) partendo dai valori, riportati in una tabella, della derivata della funzione in diversi punti.

L'interesse nel cercare alternative alla definizione della funzione derivata attraverso i limiti che presentino meno complessità semiotiche, fa nascere la seguente domanda: *come ottenere f'(x) partendo da f(x)?* Ciò che più concretamente porta a chiedersi: *come calcolare f'(x) partendo da f(x)?*

2. Una risposta tenendo conto delle rappresentazioni attivate

In Font (2000a), si stabilisce che il calcolo di $f'(x)$ partendo da $f(x)$ si può interpretare come un processo, nel quale bisogna considerare tre sottoprocessi:

1. Traduzioni e conversioni tra i diversi modi di rappresentare $f(x)$
2. Il passo da una rappresentazione di $f(x)$ a una rappresentazione di $f'(x)$
3. Traduzioni e conversioni tra i diversi modi di rappresentare $f'(x)$.

Per considerare i diversi tipi di rappresentazioni che intervengono in questi tre sottoprocessi, in Font (2000a) si propone la tabella seguente con lo scopo di considerare simultaneamente una funzione e la sua funzione derivata:

4. Per maggiori dettagli confrontare con Badillo (2003).

a da	Espressione simbolica $f'(x)$	Grafico $f'(x)$	Tabella $f'(x)$	Descrizione verbale della situazione (in termini di $f'(x)$)	Espressione simbolica $f(x)$	Grafico $f(x)$	Tabella $f(x)$	Descrizione verbale della situazione (in termini di $f(x)$)
Espressione simbolica $f(x)$								
Grafico $f(x)$								
Tabella $f(x)$								
Descrizione verbale della situazione (in termini di $f(x)$)								
Espressione simbolica $f'(x)$								
Grafico $f'(x)$								
Tabella $f'(x)$								
Descrizione verbale della situazione (in termini di $f'(x)$)								

Tavola 1 Rappresentazioni attivate nel calcolo di *f'(x)*

In questa tabella abbiamo, nelle caselle con linee verticali, le traduzioni tra le diverse forme di rappresentazione di una funzione e, nelle caselle con linee orizzontali, le traduzioni tra le diverse forme di rappresentazione della funzione derivata. Le caselle bianche indicano il passaggio da una forma di rappresentazione della funzione a una forma di rappresentazione della funzione derivata, mentre le caselle grigie ci permettono di determinare la primitiva partendo dalla funzione derivata.

Nella seguente spiegazione di un libro di testo possiamo osservare assieme i tre sottoprocessi, visto che nel primo si fa una traduzione nella forma di presentazione della funzione, poi si ottiene la funzione derivata applicando le regole di derivazione e, infine, si cercano modi diversi di rappresentazione della funzione derivata. In altre parole, si segue lo schema seguente:

Espressione simbolica di $f(x)$ $\longrightarrow$ Espressione analitica di $f(x) \Rightarrow$ Espressione simbolica di $f'(x)$ $\longrightarrow$ Espressione analitica di $f'(x)$

Derivata della funzione $f(x)=\log_a x$

Studiando la famiglia delle funzioni logaritmiche, abbiamo constatato che ognuna è il risultato di una dilatazione (o contrazione) della funzione $f(x)=\ln x$. Ciò significa che qualsiasi funzione logaritmica è del tipo $f(x) = k \cdot \ln x$. Di conseguenza, la funzione derivata della funzione $f(x) = \log_a x$ sarà:

$$f'(x) = k \cdot (\ln x)' = k \cdot \frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Ora, dal teorema sul cambiamento di base, si sa che k è uguale a $\log_a e$, cioè a $1/\ln a$.

Per cui

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{oppure} \quad \left(\log_a x\right)' = \frac{\log_a e}{x}$$

Tutte e due le espressioni della derivata si usano indistintamente.

Vedere il calcolo della funzione derivata come un processo nel quale intervengono tre sottoprocessi, ognuno dei quali può utilizzare rappresentazioni diverse, permette di ampliare il ventaglio di tecniche di calcolo della funzione derivata che non si restringe al calcolo attraverso i limiti o all'uso di regole di derivazione (Font 2000a). Queste tecniche possono essere suggerite, tra le altre cose, da (1) le possibilità offerte dai programmi per la rappresentazione grafica di funzioni e da (2) la storia della matematica. In Font (2000b) si possono trovare varie tecniche alternative per il calcolo della derivata della funzione seno.

3. Esempio di tecnica alternativa

Le attività seguenti sono pensate per studenti liceali. Il loro obiettivo è quello di utilizzare le possibilità offerte dai programmi per la rappresentazione grafica di funzioni per giungere a una congettura sulla derivata della funzione seno, bypassando il calcolo

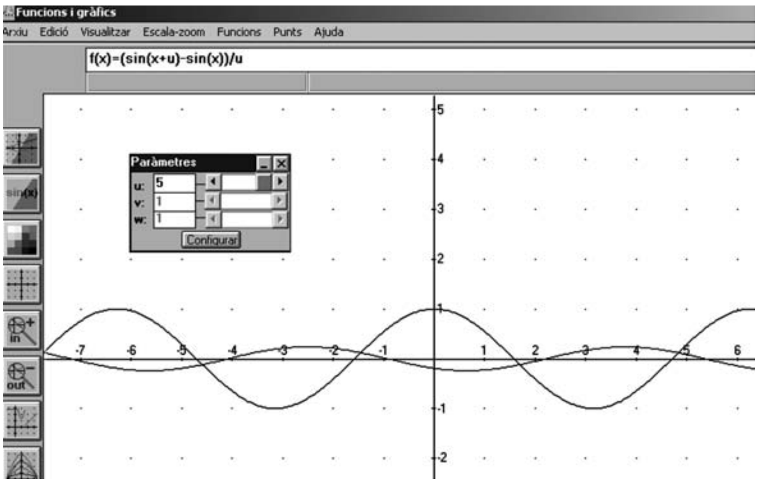
$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

per evitarne la difficoltà.

Attività: Con il programma «Funcions i gràfics» rappresenta la funzione

$$\frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

e la funzione coseno. Lo schermo mostrerà, per il valore $h = 5$:



Cosa puoi dire della funzione

$$\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$$

quando h si avvicina a zero? Cosa puoi affermare in relazione al limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}\ ?$$

Qual è la derivata della funzione seno?

In questo caso, per calcolare la derivata della funzione seno si tratta di seguire lo schema seguente:

Espressione simbolica di $f(x)$ $\longrightarrow$ grafico di $f'(x)$ $\longrightarrow$ Espressione simbolica di $f'(x)$

Un modo per ottenere il grafico della funzione derivata partendo dall'espressione simbolica di $f(x)$ consiste nell'utilizzare un programma per la rappresentazione del grafico della funzione

$$p\,f_h(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(funzione gradiente o funzione pendenza della funzione $f(x)$ rispetto a un incremento h) con h sufficientemente piccolo. Se h è molto piccolo, il grafico disegnato dal programma è una buona approssimazione del grafico della funzione derivata. Lo studente deve riconoscere il grafico della funzione che ha ottenuto come quello della funzione coseno e ricordarne la formula. Questo ultimo passo presuppone la capacità da parte dell'alunno di riconoscere il grafico della funzione coseno che vede sullo schermo del computer.

L'uso di questa tecnica permette di evitare il seguente calcolo della derivata della funzione seno e della dimostrazione del fatto che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen h}}{\text{h}}=1$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\,(x+h)-\text{sen}\,x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x$$

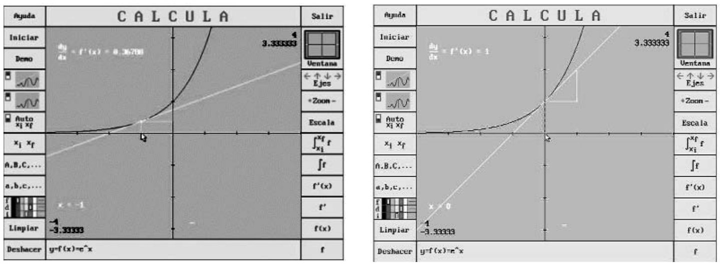
Inoltre, un altro vantaggio di questa tecnica è quello di permettere di ridurre l'unità di trigonometria che si impartisce prima di iniziare la derivata, visto che non sarà necessario trattare anche le proprietà che permettono di trasformare la differenza di seni in un prodotto.

4. Recupero di vecchie tecniche grazie ai programmi per rappresentazioni grafiche dinamiche

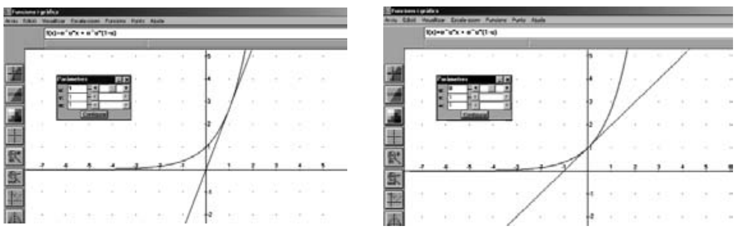
Continuiamo con un questionario proposto a un gruppo di studenti liceali (17 anni) come parte di un processo di insegnamento sulla derivata (Font, 2005). L'obiettivo del questionario è il calcolo della derivata della funzione esponenziale $f(x) = e^x$ senza usare la definizione attraverso i limiti. Prima di rispondere al questionario, gli studenti hanno lavorato con la rappresentazione grafica della funzione $f(x) = e^x$ tramite un software dinamico che ha permesso di trovare una condizione soddisfatta da tutte le sottotangenti. Più precisamente, è stato possibile osservare che per la funzione esponenziale di base e, la lunghezza della sottotangente è sempre 1.

Il software può variare da un programma classico come «Calcula», a un programma gratuito, di utilizzo molto semplice, che permette di rappresentare funzioni con parametri come «Funcions i gràfics», fino ad arrivare ad applets specificamente programmati.

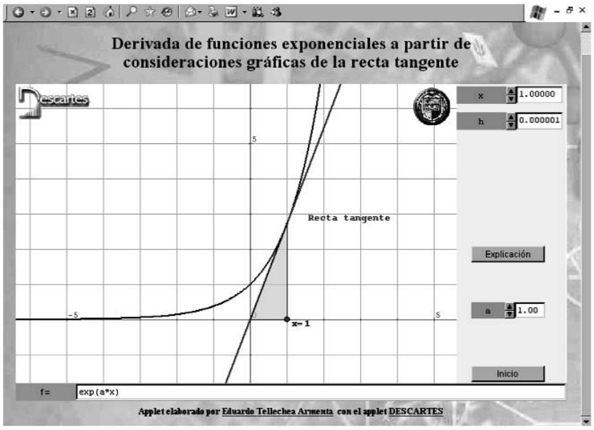
Programma Calcula



Programma «Funcions i gràfics»



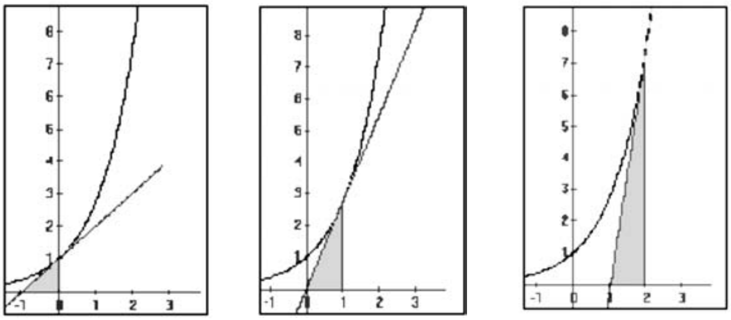
Applets[5]



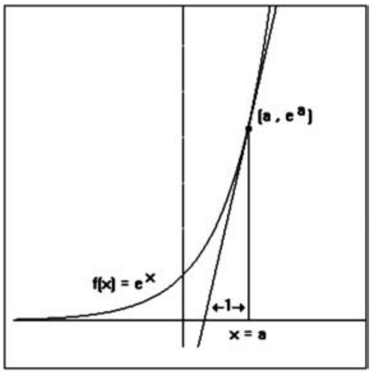
Questionario

Nell'aula di informatica hai osservato che la funzione $f(x) = e^x$ soddisfa la proprietà che tutte le sottotangenti hanno lunghezza uguale a 1. Utilizzando questa proprietà:

a) Calcola $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$



b) Calcola $f'(a)$



5. Applet elaborato da Eduardo Tellechea Armenta con l'applet DESCARTES. Scaricabile da: http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Descartes/ActividadesProyecto/deriexponenciales.htm.

c) Dimostra che la funzione derivata della funzione $f(x) = e^x$ è la funzione $f'(x) = e^x$.

Per calcolare la derivata della funzione $f(x) = e^x$ gli studenti devono compiere una serie di azioni (una tecnica) che consiste nel considerare, all'inizio, un punto particolare con la tangente disegnata (quindi, l'ascissa e l'ordinata non si considerano variabili). Poi, grazie alla manipolazione con programmi informatici di geometria dinamica, si trova una condizione che soddisfano tutte le rette tangenti (in questo caso: la sottotangente ha sempre lunghezza uguale a 1). Questa condizione poi si simbolizza, applicando l'interpretazione geometrica della derivata, e questo permette di calcolare la derivata in $x = a$. Per finire, gli studenti devono avere bene in chiaro che la condizione che hanno trovato e il calcolo della pendenza che da questa si effettua, sono validi per ogni punto, di modo che il punto, che all'inizio si considerava come un punto particolare, possa essere considerato poi come un punto qualsiasi. In questo modo si ottiene l'espressione simbolica della funzione derivata.

Questa tecnica relaziona le seguenti rappresentazioni:

Grafico di $f(x)$ e Espressione simbolica di $f(x) \Rightarrow$ Espressione simbolica di $f'(x)$

Il punto di partenza per trovare una condizione che soddisfano tutte le tangenti è il grafico di $f(x)$. L'espressione simbolica di $f(x)$ è necessaria per simbolizzare la condizione che soddisfano tutte le pendenze della retta tangenti, la quale ci permette di dedurre l'espressione simbolica di $f'(x)$. Questa tecnica è possibile unicamente se si introducono la rappresentazione grafica e quella simbolica della funzione esponenziale di base *e* assieme, altrimenti, senza rappresentazione grafica, la tecnica non può essere utilizzata. Lavorare con la rappresentazione grafica, oltre che con quella simbolica, permette di realizzare delle attività che con la sola rappresentazione simbolica non sarebbero possibili.

Il calcolo della derivata della funzione esponenziale di base *e* è a metà strada tra ciò che storicamente si conosce come il problema della tangente e il suo inverso – non è esattamente il problema della tangente, visto che qui la tangente è già costruita; non è nemmeno il problema inverso, visto che si conosce l'espressione simbolica della funzione –. Questo metodo è stato suggerito dai procedimenti utilizzati per costruire la tangente e la normale nel periodo che va da Descartes a Barrow.

Questa tecnica ha un campo di applicazione limitato, ma si può applicare, tra gli altri, alla famiglia delle funzioni che hanno per grafico una retta e alle funzioni esponenziali e logaritmiche.

5. Ampliamento del ventaglio delle tecniche di calcolo di f '(x)

I due esempi di tecniche alternative considerati precedentemente permettono di ampliare il ventaglio di tecniche per calcolare la funzione derivata. Oltre alle due tecniche usuali (1 e 4) compaiono due nuove tecniche (2 e 3).

Come si calcola f'(x)?

- direttamente
  - 1) Utilizzando i limiti
    $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
  - 2) Graficamente
    - 2.1) Trovare una condizione per tutte le rette tangenti
    - 2.2) Trovare f'(x) a partire dalla condizione precedente
  - 3) Approssimativamente
    - 3.1) Schizzare il grafico di $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ per un valore di h molto piccolo
    - 3.2) Considerare che
      $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$
    - 3.3) Trovare l'espressione di f'(x) a partire dal grafico di $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- indirettamente
  - 4) Utilizzando le regole di derivazione

Schema 1

Visto che ogni retta tangente in un punto del grafico della funzione $f(x) = e^x$ soddisfa la condizione di avere una sottotangente lunga 1, si può applicare il procedimento 2 alla funzione logaritmo naturale, ciò che permette di prescindere, nella unità sui limiti, dallo studio della forma indeterminata, mentre l'uso del procedimento 3 per la funzione seno permette di prescindere, nell'unità di trigonometria, dallo studio delle formule trigonometriche che trasformano una differenza di seni in un prodotto. Quindi, l'incorporazione di queste due tecniche permette un'organizzazione dell'unità didattica delle derivate che riduce considerevolmente i contenuti di due unità (limiti e trigonometria) impartite precedentemente.

6. Altri aspetti da considerare

Sebbene sia importante considerare le rappresentazioni attivate nel calcolo della funzione derivata, bisogna tener presente altri fattori che rendono il quadro più complesso. Tra gli altri, la dualità particolare-generale o le metafore utilizzate nel discorso del professore e in quelli degli alunni.

Se osserviamo le tre domande del questionario del paragrafo 4 (calcolo della derivata della funzione esponenziale di base *e*) possiamo intuire che nella sua redazione si è tenuto molto presente il passaggio dal particolare al generale. Nel punto *a* si chiede di calcolare la derivata per tre valori concreti (0, 1 e 2). Nel punto *b* si domanda di calcolare la derivata per un valore concreto «*a*» e nel punto *c* per un valore qualsiasi. In altre parole, il passaggio dal particolare al generale è stato molto curato nella progettazione del questionario e le rappresentazioni che intervengono sono considerate, secondo convenienza, come particolari o generali. Non basta solo considerare il tipo di rappresentazione che interviene nella tecnica, occorre anche riflettere sul ruolo che detta rappresentazione gioca in relazione alla dualità particolare-generale.

D'altra parte, gli alunni, prima di rispondere al questionario, hanno lavorato con la rappresentazione grafica della funzione $f(x) = e^x$ con un software dinamico che ha permesso loro di trovare una condizione soddisfatta da tutte le sottotangenti (hanno lunghezza uguale a 1). Questo software dinamico struttura implicitamente i grafici delle funzioni nei termini della metafora seguente: «Il grafico di una funzione si può considerare come la traccia che lascia un punto che si muove su di un cammino (il grafico)» (Font y Acevedo, 2003).

Sebbene ci sia abbastanza accordo tra i ricercatori in didattica della matematica sull'importanza che hanno le rappresentazioni o la dualità particolare-generale, l'importanza della metafora nella comprensione degli alunni ha iniziato solo molto recentemente a essere riconosciuta. La metafora è più importante di quanto normalmente si creda per strutturare la comprensione degli alunni, come si può osservare nel seguente episodio descritto in Bolite, Acevedo y Font (2005):

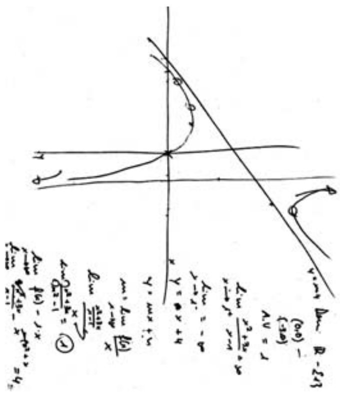
> «A questo alunno si chiese di commentare i passaggi precedenti (dominio; intersezioni con gli assi; asintoti e limiti all'infinito; studio di massimi, minimi, intervalli di crescita e decrescita; studio dei punti di flesso e intervalli di convessità e concavità) e la costruzione del grafico nell'esame. Sia il grafico che i passaggi precedenti della sua risposta alla domanda dell'esame erano corretti.
>
> Sebbene nella risposta scritta non fosse presente alcuna metafora, queste furono onnipresenti nella sua spiegazione verbale di come aveva costruito il grafico. Per esempio, alla domanda: puoi dirmi quando la funzione sarà crescente o decrescente? l'alunno aveva risposto correttamente indicando con il dito gli intervalli e dicendo qui cresce perché va in su e qui decresce perché va in giù.

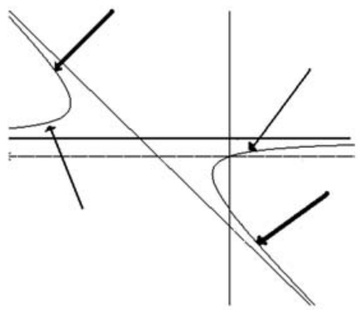
Intervistatore: Puoi dirmi quando la funzione è crescente e quando è decrescente? [(intanto avvicina il foglio sul quale l'alunno ha disegnato il grafico della funzione in posizione orizzontale].

Alunno D: (Esita alcuni secondi) Non capisco, vuol dire che ha cambiato gli *assi?*

Intervistatore: No, non ho cambiato gli assi, sono sempre gli stessi.

Alunno D: Questa è decrescente perché scende e questa è crescente perché sale, quest'altra è decrescente perché scende e questa crescente perché sale. [Esita per alcuni secondi e con il dito indica la parte della curva indicata con una freccia fine come crescente e quella indicata con una freccia grossa come decrescente]





7. Considerazioni finali

La realizzazione della maggior parte delle attività matematiche comporta una complessità semiotica importante e le rappresentazioni utilizzate sono determinanti sia per diminuire o aumentare questa complessità, sia per la realizzazione effettiva dell'attività. Per esempio, se nel questionario del paragrafo 4 si fosse eliminata la domanda b, continueremmo a pretendere che l'alunno applichi la stessa tecnica di calcolo della funzione derivata e continueremmo a utilizzare grafici (quelli dell'attività precedente con il computer e quelli della domanda a) ed espressioni simboliche (domanda c), ma la complessità semiotica che l'alunno dovrebbe affrontare aumenterebbe notevolmente e, con essa, muterebbero le possibilità effettive di risolvere il compito.

Quando nell'attività matematica utilizziamo una rappresentazione come un elemento generico stiamo lavorando con un oggetto particolare, ma ci poniamo in un «gioco di linguaggio» nel quale si intende che ci interessano le sue caratteristiche generali e che prescindiamo dagli aspetti particolari. L'assimilazione (o non assimilazione) delle regole di questo gioco di linguaggio è fondamentale affinché gli alunni possano convivere con la complessità semiotica associata alle pratiche nelle quali intervengono rappresentazioni che si considerano come elementi generici.

L'utilizzo di programmi per la rappresentazione grafica nell'insegnamento delle funzioni e delle derivate produce effetti metaforici che condizionano la comprensione degli alunni. Per esempio, l'utilizzo di programmi dinamici di rappresentazione grafica può portare molti alunni a strutturare il grafico per mezzo della proiezione metaforica del proprio campo di esperienze su ciò che è un «percorso» (inizio, fine, punto che si muove, prima, dopo, ecc.).

Bibliografia

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/ TDX-0611104-144929/]

Bolite Frant, J., Acevedo, J. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41-54.

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2): 151-186.

Font, V. (2000a). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral, Universitat de Barcelona. [URL: http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0408108-104902/]

Font, V. (2000b). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Uno,* 25, 21-40.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* 109-128. Córdoba: Universidad.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21, 3, 405-418.

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/ siidm/boletin15.htm].

3. Sviluppo di competenze di analisi didattica nella formazione degli insegnanti di matematica[1]

Juan D. Godino, Mauro Rivas, Walter F. Castro, Patricia Konic[2]

The mathematic teacher's main tasks are designing, implementing, and evaluating his work as a teacher with the goal to support the students' learning process. The complexity of this work is well known, if we consider the various aspects involved and the elements which influence teaching and learning mathematics. In this talk we will present some theoretical notions that may help mathematics teachers to think over their professional experience, considering that they open new research perspectives in mathematics education. These notions are based on the theoretical approach on mathematical and didactic knowledge that we indicate as "onto-semiotic"[3], in which are considered the epistemic dimensions (interpreted according to an anthropological approach), the cognitive (a semiotic approach), and the instructional dimensions (a socio-constructivist approach) of mathematics study.

1. Competenze dell'insegnante di matematica

L'uso del termine *competenza* è entrato con forza nel tema dell'educazione matematica, ma soprattutto nell'ambito dello sviluppo curricolare, della pratica di insegnamento e della valutazione, dove si parla frequentemente di «insegnare per competenze». In questo contesto, competenza si usa come il costrutto cognitivo-affettivo generale che include «conoscenze, attitudini e abilità necessarie per svolgere una data occupazione».

La nozione di competenza non cessa di essere problematica: equivale a formazione per il lavoro? Suppone formazione a-teorica? È una nuova moda psico-pedagogica? Come afferma Tejada (1999, p. 21), non è facile delimitare il concetto di competenza, come si evidenzia facendo una analisi della letteratura su questo campo. Le differenti oscillazioni avute nella sua concrezione dallo psicologico, al pedagogico, al lavorativo, al sociale etc., indicano che questo termine non è univoco.

Nel caso delle competenze matematiche, in diversi lavori Godino e i suoi collaboratori (Godino, 2002; Godino, Batanero, Font, 2007) hanno attribuito alla nozione di *conoscenza* il carattere olistico che l'approccio pedagogico/curricolare attribuisce alla nozione di competenza. Da un punto di vista pragmatico, conoscere/sapere implica l'uso competente degli oggetti che costituiscono la conoscenza, la capacità di relazionarsi fra loro, ossia, comprendere, e di applicarli alla soluzione di problemi. Un vasto studio dell'uso della nozione di competenza in matematica si sviluppa in D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla (2003).

Nel Rapporto Finale del Progetto Tuning (González, Wagenaar, 2003), le competenze e le destrezze vengono interpretate come «conoscere e comprendere» – co-

1. Convegno di didattica della Matematica (Locarno, Agosto 2008). http://www.ugr.es/local/jgodino.
2. J.D. Godino, Università di Granada (Spagna); M. Rivas, Università di Los Andes (Venezuela); W.F. Castro, Università di Antioquia (Colombia); P. Konic, Università di Río Cuarto (Argentina).
3. See http://www.ugr.es/local/jgodino.

noscenza teorica di un campo accademico –, «sapere come attuare» – l'applicazione pratica e operativa della conoscenza a determinate situazioni – e «sapere come essere» – i valori come parte integrante del modo di percepire gli altri e vivere in un contesto sociale –. Queste competenze si classificano in due grandi gruppi: generali e specifiche.

1. *Competenze generali (o trasversali).* Due grandi gruppi:
   a. *Strumentali* o strumenti per l'apprendimento e la formazione. Per esempio: analisi e sintesi, organizzazione e pianificazione, conoscenze generali indispensabili, conoscenze indispensabili della professione etc.
   b. *Sistematiche* o capacità che danno il punto di vista d'insieme e servono per gestire il totale della realizzazione. Per esempio: applicare le conoscenze alla pratica, abilità di investigazione, capacità di apprendere (apprendere ad apprendere), adattamento a nuove situazioni, organizzazione e gestione di progetti etc.
2. *Competenze specifiche.* Due grandi gruppi: quelle riferite alla formazione disciplinare che devono acquisire i laureati – competenze disciplinari e accademiche (sapere) – e quelle riferite alla formazione professionale che devono avere i futuri laureati – competenze professionali (saper fare).

Applicate al caso dell'insegnante di matematica, queste competenze generali e specifiche si possono realizzare in ciò che possiamo chiamare competenza per l'«analisi e sintesi didattica», cioè competenza per analizzare i processi di insegnamento e apprendimento della matematica e per sintetizzare il complesso delle conoscenze prodotte dalla Didattica della Matematica per la progettazione, l'implementazione e la valutazione della propria pratica docente.

L'insegnante di matematica di scuola primaria e secondaria deve avere un certo livello di competenza matematica, cioè conoscere ed essere capace di applicare le pratiche matematiche necessarie per risolvere problemi che usualmente si risolvono in primaria e secondaria. Ma dal punto di vista dell'insegnamento e dell'apprendimento, l'insegnante deve essere capace di analizzare l'attività matematica necessaria per risolvere i problemi, identificando gli oggetti e i significati posti in gioco, con il fine di arricchire la sua interpretazione e contribuire allo sviluppo delle sue competenze professionali.

Uno dei compiti chiave dell'insegnante di matematica è la scelta e l'adattamento di situazioni-problema che promuovano la contestualizzazione dei contenuti matematici, la loro applicazione e l'esercitazione. I problemi non possono essere eccessivamente rigorosi/unici, ma debbono permettere l'articolazione delle distinte competenze matematiche e, pertanto, avere un carattere globalizzante. Nel caso della formazione matematica e didattica degli insegnanti, è necessario selezionare problemi la cui soluzione ponga in gioco competenze di distinti blocchi di contenuto disciplinare (aritmetica, geometria, misura, statistica, algebra), di altre aree curricolari (conoscenza dell'ambiente e della società) e specialmente che promuovano l'articolazione tra le competenze di tipo matematico e didattico.

Non è però sufficiente disporre di «situazioni ricche», si richiede di procedere verso l'organizzazione di configurazioni e percorsi didattici (Godino, Contreras, Font, 2006) idonei dal punto di vista epistemico, cognitivo e istruzionale. Per questo occorre considerare i ruoli potenziali dell'insegnante, degli studenti, le risorse (in particolare la gestione del tempo didattico) e i modelli di interazione tra questi componenti dei sistemi didattici. L'organizzazione e la gestione dei percorsi didattici chiede, da parte dell'insegnante, lo sviluppo di competenze di analisi degli oggetti matematici e dei significati che vengono messi in gioco nella soluzione di problemi matematici, al fine di prevedere conflitti di significati e distinte possibilità di istituzionalizzazione delle conoscenze matematiche implicate.

2. Competenze di analisi didattica e loro sviluppo

Di seguito includiamo uno schema di classificazione delle competenze specifiche per la formazione didattica degli insegnati, considerando alcuni aspetti dell'approccio ontosemiotico della conoscenza e della istruzione matematica sviluppato da Godino, Batanero e Font (2007).

1. *Competenze riferite alla progettazione e implementazione di processi di studio matematico:*
   - Selezionare e rielaborare i *problemi matematici* idonei agli alunni dei distinti livelli, usando le risorse linguistiche e i mezzi appropriati in ciascuna circostanza.
   - *Definire, enunciare e giustificare* i *concetti i procedimenti e le proprietà* matematiche, considerando le nozioni precedenti necessarie e i processi implicati nella loro generazione.
   - Implementare *configurazioni didattiche* che permettano di identificare e risolvere i *conflitti semiotici* nella *interazione didattica* e di ottimizzare l'apprendimento matematico degli alunni.
   - Riconoscere il sistema di *norme sociali* e *disciplinari* che riducono e rendono possibile lo sviluppo dei processi di studio matematico e apportano spiegazioni plausibili dei fenomeni didattici.
2. *Competenze riferite alle conoscenze didattiche specifiche e valutazione della idoneità didattica:*
   - Conoscere i contributi della Didattica della Matematica all'insegnamento e apprendimento di blocchi di contenuti e *processi matematici* trattati nella scuola primaria (secondaria), e riferiti a: sviluppo storico (da una prospettiva epistemologica) dei contenuti da insegnare, degli orientamenti curricolari, delle tappe di apprendimento, dei tipi di errori e difficoltà, dei modelli di interazione didattica e dei loro effetti nell'apprendimento, dell'uso di mezzi tecnologici e materiali manipolativi, di proposte di insegnamento sperimentate positivamente, di strumenti di valutazione etc. Queste conoscenze permettono di ricostruire un *significato di riferimento* matematico e didattico per i processi di studio immaginato o implementato e, di conseguenza, emettere un giudizio valutativo su loro stesse che orienti l'incremento della *idoneità didattica* di tali processi (Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2007).
   - Valutare l'idoneità didattica dei processi di studio pianificati o imple-

mentati nelle loro distinte dimensioni (*epistemica, cognitiva, affettiva, interazionale, di mediazione ed ecologica*). Questa competenza suppone per l'insegnante lo sviluppo di una attitudine positiva verso l'insegnamento della matematica, di modo che valorizzi tanto il suo ruolo formativo, quanto la sua utilità nell'educazione dei cittadini e dei professionisti.

Lo sviluppo delle competenze didattiche è una sfida complessa per i formatori degli insegnanti per la differenza di dimensioni e di componenti da considerare. Una di tali dimensioni si riferisce all'analisi delle proprie conoscenze matematiche, per le quali sarà necessario adottare una visione ampia che riconosca il ruolo centrale dell'attività di risolvere problemi nella generazione della conoscenza.

Nel nostro caso stiamo sperimentando l'applicazione di *cicli formativi* sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica e della sua didattica per futuri insegnanti, i quali includono i seguenti tipi di situazioni-problema di studio matematico-didattico:

1. Risoluzione di problemi in linea con un modello didattico-storico-costruttivo-istruzionale.
2. Riflessione epistemico-cognitiva sugli oggetti e i significati[3] posti in gioco nella risoluzione dei problemi.
3. Analisi delle interazione nelle ore di matematica.
4. Riconoscimento del sistema di norme che condizionano e sopportano l'attività di studio matematico.
5. Valutazione dell'idoneità didattica del processo di studio matematico sperimentato.

In questi processi di studio si implementa un percorso didattico che contempla le seguenti fasi o momenti: 1) Presentazione delle consegne; 2) Esplorazione personale; 3) Lavoro cooperativo in équipe per elaborare una risposta condivisa: 4) Presentazione e discussione; 5) Istituzionalizzazione da parte del formatore che esplicita le conoscenze richieste; 6) Studio personale di documenti di lavoro selezionati, basato sulle teorie individuali e di gruppo.

Un ciclo formativo di questo tipo viene descritto in Godino, Batanero, Roa e Wilhelmi (2008) basato sullo studio di nozioni elementari di statistica a partire da un progetto di analisi di dati. Nel paragrafo che segue presentiamo un altro caso basato sulla risoluzione di un problema aritmetico-algebrico.

3. Analisi didattica di un problema aritmetico-algebrico

La situazione-problema che usiamo per illustrare il tipo di attività matematica e didattica che consideriamo utile nella formazione di insegnanti è stata propo-

3. Gli oggetti e i significati matematici sui quali si orienta la riflessione vengono descritti in Godino, Batanero e Font (2007), così come i supposti antropologici che servono di base all'«approccio ontosemiotico». Gli studenti sono avviati progressivamente nel riconoscimento di tali oggetti e processi, così come alla prospettiva pluralista e relativista del significato degli oggetti matematici.

sta a un campione di 84 studenti di magistero nel quadro di una disciplina diretta a completare la loro formazione matematica nella prospettiva dell'insegnamento. Gli oggetti specifici dell'attività sono stati:

– Creare una situazione introduttiva di riflessione sulle proprietà e sull'algoritmo della moltiplicazione di numeri naturali.
– Riflettere e discutere sulle caratteristiche del ragionamento deduttivo per provare una proposizione di fronte a una verifica empirica di casi.
– Favorire il ragionamento algebrico all'introduzione di nozioni che facilitano la generalizzazione di un problema aritmetico.
– Analizzare la *matematica in uso* posta in gioco nella soluzione del problema, cioè gli oggetti matematici presupposti o richiesti affinché il bambino si coinvolga nella risoluzione e nei nuovi oggetti e significati emergenti.

Gli studenti hanno lavorato in una prima fase in gruppi di 2 e 4 e dovevano scrivere con dettagli la risoluzione del problema. Trascorsi 30 minuti gli studenti hanno consegnato i fogli di risposte che sono state usate dall'insegnante per organizzare il lavoro in comune, per la discussione e istituzionalizzazione.

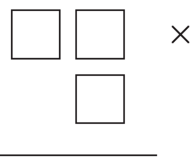
3.1. Una situazione introduttiva per la moltiplicazione

La situazione-problema che presentiamo di seguito pone in gioco conoscenze aritmetiche e algebriche nel momento in cui provoca la riflessione sul ruolo dell'argomentazione deduttiva, sulla sua efficacia relativa e la sua validità di fronte alle verifiche empiriche. Con questo esempio illustreremo un tipo di analisi epistemico-cognitiva[4] di attività matematiche che consideriamo potenzialmente utile per lo sviluppo di competenze strumentali e disciplinari-accademiche dell'insegnante di matematica.

Come situazione introduttiva al tema della moltiplicazione di numeri naturali e allo sviluppo del ragionamento algebrico elementare abbiamo proposto ad un gruppo di 84 studenti il seguente problema (Malaspina, 2007):

Pedro ha scritto alla lavagna i numeri 2, 5, 6, e 3.

a) Scegli tre di questi numeri, diversi fra loro, e scrivili nelle seguenti caselle in modo che il prodotto dei numeri sia **il maggiore possibile**



b) Juan dice che è capace di scegliere i tre numeri che danno il prodotto massimo senza fare **nessuna moltiplicazione.**

b1) È possibile?; b2) Quale potrebbe essere il procedimento di Juan?; b3) Come si può giustificare? *Discutere le risposte*.

c) Ora Pedro propone questa sfida:

Dati cinque numeri naturali qualsiasi di una cifra (***a, b, c, d, e***), se ne devono scegliere tre per formare il **moltiplicando** e gli altri due per formare il **moltiplicatore**. Descrivi e giustifica un procedimento per scegliere i numeri in modo che il prodotto sia il **minore possibile**.

4. Il termine epistemico si usa qui per riferirsi alle conoscenze matematiche poste in gioco nella soluzione attesa del problema, invece cognitivo alle conoscenze effettivamente dimostrate dagli studenti.

3.2. Soluzioni attese

Una prima soluzione «ingenua» che possiamo incontrare, come viene riportato in Malaspina (2007), consiste nell'effettuare delle prove con le distinte terne di numeri che si possono formare, calcolare i prodotti e scoprire il maggiore. Se si provano sistematicamente le 24 alternative possibili, tale procedimento di verifica esaustiva di casi fornisce la soluzione del problema. Però si vede che è alquanto inefficace.

Per il paragrafo b) il procedimento di Juan sarà:

1. Scartare il numero 2 perché essendo il minore, la sua moltiplicazione per qualsiasi dei restanti darà un prodotto minore.
2. Scegliere come moltiplicatore il maggiore, 6, come decina del moltiplicando il 5 e come unità il 3. Non si può scambiare il 6 con il 5 perché 6×3 è maggiore di 5×3. La soluzione è, dunque, 53×6 = 318.

Per la generalizzazione che si chiede nel paragrafo c) il procedimento sarà il seguente:

1. Ordinare dal minore al maggiore i numeri dati; per esempio, supporre che l'ordine alfabetico delle lettere date corrisponda all'ordine dei numeri, cioè: $a < b < c < d < e$.
2. Scartare i due numeri maggiori, d ed e, dal momento che «*a minor fattore corrisponde minor prodotto*», e in questo caso si tratta di trovare il minor prodotto possibile.
3. Scegliere come moltiplicatore il minor numero, a, come decina del moltiplicatore b e come unità c. La soluzione è, dunque, $bc \times a$.

Il paragrafo a) del problema richiede di trovare il massimo di una funzione P di tre variabili, x, y, z, che prendono i loro valori in uno stesso dominio: l'insieme finito formato dai numeri {2, 5, 6, 3}. Le variabili corrispondono alle decine e alle unità del moltiplicando, e l'unità del moltiplicatore ($P = f(x, y, z)$; $P = xy \times z$).

Il procedimento empirico di soluzione richiede, per essere verificato, la verifica esaustiva delle 24 alternative combinatorie possibili e della scelta di quella che dà, come risultato, il maggior prodotto.

Il procedimento deduttivo si basa sulle proprietà del sistema di numerazione decimale e sull'uso della seguente proprietà della moltiplicazione di numeri naturali: «a maggior fattore corrisponde maggior prodotto». Il paragrafo b) del problema richiede di incoraggiare l'applicazione di questa tecnica deduttiva.

Il paragrafo c) mette in gioco competenze di ragionamento algebrico (uso di notazioni simboliche per esprimere le variabili, che facilitano la generalizzazione del dominio di definizioni delle variabili di intervallo [0, 9] di numeri naturali).

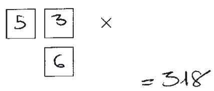
I paragrafi a) e b) possono esser proposti in 5° o 6° di scuola primaria. Il paragrafo c) può essere idoneo per la secondaria e i corsi di formazione degli insegnanti, che è l'uso qui descritto.

Nella seguente sezione effettuiamo un'analisi delle conoscenze esplicite e implicite che si mettono in gioco nella realizzazione di questa attività, usando alcune nozioni teoriche dell'«approccio ontosemiotico» della conoscenza e della istruzione matematica (Godino, Batanero, Font, 2007). La realizzazione di questo tipo di analisi è utile agli insegnanti di matematica, essendo possibile applicarla tanto alle soluzioni attese dal punto di vista dell'insegnante, quanto alle soluzioni date dagli studenti. L'analisi della «matematica in azione» che effettuiamo in questo lavoro dovrebbe essere una competenza strumentale e disciplinare dell'insegnante di matematica che gli permetta di riconoscere la complessità di oggetti e di processi matematici posti in gioco nelle attività matematiche, di prevedere potenziali conflitti, di adattarli alle capacità dei suoi studenti e agli obiettivi di apprendimento.

4. Configurazione di oggetti e significati

Nel EOS è stata introdotta la nozione di configurazione di oggetti e significati come risorsa per descrivere le pratiche matematiche poste in gioco nella risoluzione di una situazione-problema. Questa nozione permette di ampliare l'ottica di attenzione delle rappresentazioni all'insieme delle entità riferite alle stesse e ai ruoli che interpretano nell'attività matematica (Font, Godino, D'Amore, 2007). Di seguito identifichiamo i tipi di oggetti o entità primarie poste in gioco nella risoluzione del problema, raggruppate nelle seguenti categorie: elementi linguistici, concetti (intesi qui come entità che hanno una definizione), procedimenti, proprietà e argomenti; allo stesso modo distinguiamo le entità che si possono considerare come precedenti o controlli delle entità nuove o emergenti delle attività. In quanto ai processi matematici implicati iniziamo a identificare i processi di significato, cioè spiegando a che cosa si riferiscono gli oggetti o che ruolo svolgono. Allo stesso modo, formuliamo ipotesi sui conflitti semiotici potenziali nel momento in cui si confrontano i significati istituzionali attesi con i significati personali descritti in bibliografia o in esperienze precedenti.

4.1. Elementi linguistici

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
«Scegli tre di questi numeri…».	Selezione di un campione di tre cifre tra cinque date, usare due di queste come moltiplicando e le altre come moltiplicatore.
Prodotto dei numeri.	Risultato dell'operazione del moltiplicare.
Maggiore possibile.	Maggiore insieme dei prodotti ottenuti formando tutte le alternative possibili dei tre numeri.
	Indica in modo iconico le variabili delle distinte cifre che devono formare il moltiplicando, il moltiplicatore, l'operazione (×) e il posto dove si deve scrivere il prodotto.
Simboli alfabetici (a, b, c, d, e).	Numeri naturali qualsiasi a una cifra.
Emergenti	
	Scelta di numeri che danno come prodotto il valore maggiore.
Scrittura sistematica di tutte le alternative possibili, o una espressione in lingua naturale basata sulla proprietà «maggior fattore implica maggior prodotto».	Argomentazione sul fatto che il prodotto dell'alternativa scelta è il maggiore.

Conflitti potenziali

– Si può sperare che gli alunni facciano una scrittura parziale dell'insieme delle alternative combinatorie senza apportare ragioni a proposito di quelle che non è necessario scrivere.
– L'espressione «numeri qualsiasi (a, b, c, d, e)» può essere interpretata nel senso di dare valori particolari (1, 2, 3, 4, 5), «ciò che uno chiede», e mostrare la soluzione per il detto caso.
– Spiegazione scritta parziale o scorretta dei procedimenti e delle giustificazioni, tanto nel caso b) quanto nel caso c).

4.2. Concetti/definizioni

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Numeri.	Sequenza ricorsiva di simboli che si combinano secondo certe regole per formarne altri da 2 e 3 cifre; numerazione decimale; unità, decine e centinaia.
Moltiplicazione di numeri naturali; fattori, prodotto.	Operazione aritmetica, dati due numeri naturali (moltiplicando e moltiplicatore) la moltiplicazione di detti numeri consiste nell'ottenere un terzo (prodotto), ...
Uguaglianza.	Risultato di una operazione aritmetica.
Variabile.	Simbolo (letterale o iconico) che può prendere i diversi valori di un insieme di numeri.
Funzione; $P = f(x, y, z)$; definita in $A = \{2, 5, 6, 3\}$, e l'insieme $\{n \in \mathbf{N} \mid 0 \leq n \leq 9\}$.	Il prodotto dipende dai valori che si danno alle unità e alle decine dei fattori.
Ordine, maggiore, massimo di un insieme.	Ordinamento e estremo superiore dell'insieme formato dai prodotti di tutte le selezioni possibili.
Emergenti	
Alternativa combinatoria di terne di numeri.	Formano il moltiplicando e il moltiplicatore delle moltiplicazioni cercate.
Insieme di alternative.	Insieme di definizione della funzione P di cui si deve trovare il massimo.
Moltiplicando e moltiplicatore.	Interpretare un ruolo necessario (non è indifferente mettere il 6 nel moltiplicatore come unità o come decina del moltiplicando).
Procedimento. Giustificazione.	Usando questi concetti si prospettano due nuovi problemi: trovare un procedimento più efficace della costruzione di tutte le alternative e giustificare la validità del nuovo procedimento in modo deduttivo, non empirico.
Ragionamento.	Descrizione dettagliata del procedimento e delle sue giustificazioni.

Conflitti potenziali

– Gli alunni possono non avere familiarità con i concetti matematici di procedimento, giustificazione, ragionamento.
– Il concetto di funzione si usa in maniera tacita (non ostensiva); trattando una funzione di tre variabili P(x, y, z) gli alunni possono non identificare questa funzione nel caso in cui non abbiano familiarità con questo tipo di funzioni.

4.3. Proprietà

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Regole del sistema di numerazione decimale (1 decina = 10 unità).	Si usa la scrittura posizionale dei numeri e l'algoritmo della moltiplicazione.
Tavole di moltiplicazione e addizione.	Si usano nell'algoritmo della moltiplicazione.
Proprietà associativa, commutativa e distributiva.	Giustificano l'algoritmo della moltiplicazione.
Emergenti	
P1: «Maggiore (minore) fattore, maggiore (minore) prodotto».	Giustifica il procedimento determina la soluzione migliore.
P2: Nelle condizioni date, l'alternativa dei numeri che si devono prendere è 3×6 dal momento che il suo prodotto 318 è il maggiore possibile.	Questo enunciato costituisce la soluzione del problema b2).
P3: Se $a<b<c<d<e$, $bc \times a$ dà il minor prodotto.	Questo enunciato costituisce la soluzione del problema c).

Conflitti potenziali

– Non trovare la proprietà P1, la P2, o la P3.

4.4. Procedimenti

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Algoritmo per moltiplicare un numero di due cifre per un altro di una cifra.	Si usa per ottenere i prodotti richiesti.
Formazione sistematica delle combinazioni possibili di tre numeri (combinazioni di 4 elementi a due a due, per permutazioni di due, ossia 24).	Si usa per formare tutti i prodotti possibili e per poter trovare il massimo.
Emergenti	
b2) Scartare il 2; cercare come moltiplicatore il maggiore, 6; cercare come moltiplicando il 53.	Dà la soluzione ottimale del problema (53×6 = 318)
c) Ordinare, $a<b<c<d<e$, scartare e, …	Dà la soluzione chiesta nel caso c)

Conflitti potenziali:

– Non essere capace di formare tutte le alternative combinatorie
– Non trovare il procedimento per il caso b2)
– Non trovare il procedimento per il caso c).

4.5. Argomenti

OGGETTI	SIGNIFICATI
Precedenti	
Verifica empirica esaustiva delle 24 possibili combinazioni dei fattori, o una loro parte.	Fornisce una soluzione inefficace del problema della parte a).
Emergenti	
A1: Considerando che «a maggior fattore corrisponde minor prodotto» si scarta il 2, prendendo come moltiplicatore il 6 e prendendo come decina del moltiplicando il 5.	Giustificazione deduttiva della proposizione che afferma la soluzione ottimale del problema nel caso b3).
A2: Se $a<b<c<d<e$ si inizia con lo scartare *e* perché essendo il maggiore darà il maggior prodotto, ...	Giustificazione deduttiva della proposizione che stabilisce la soluzione ottima del problema nel caso c).

Conflitti potenziali

– Non formulare correttamente gli argomenti A1 e A2

5. Analisi delle risposte degli studenti

Il problema analizzato nei paragrafi precedenti è stato usato come una situazione introduttiva in uno dei temi di matematica per maestri in un corso di formazione iniziale di insegnanti. In una prima fase gli studenti hanno risolto il problema in gruppi di 2 e 4 consegnando, alla fine, un foglio con la soluzione al professore che, di seguito, ha organizzato il dibattito corrispondente prendendo alcune delle soluzioni date dai gruppi come punto di partenza. Questa tecnica didattica permette di accedere ai significati iniziali degli studenti sui singoli oggetti posti in gioco nella risoluzione e di partire da questi per promuovere i nuovi apprendimenti.

Di seguito riassumiamo le risposte date dall'insieme dei distinti gruppi.

A proposito del paragrafo a) del problema, troviamo che dei 24 gruppi, il 20,8% fa solo una moltiplicazione, dimostrando, dunque, che si può ottenere la selezione di numeri che dà il prodotto massimo, tenendo conto delle proprietà del sistema di numerazione e delle proprietà della moltiplicazione dei numeri naturali. Però 9 gruppi (37.5%) fanno più di 4 tentativi (alcuni di loro fino a 9), e 10 (41,6%) fanno 2 o 3 moltiplicazioni, senza dare nessuna giustificazione del fatto che non è necessario realizzare le restanti possibili.

Nella tavola 1 riassumiamo i tipi di risposte, con le frequenze e le percentuali di ogni tipo, nei paragrafi b) e c). Occorre sottolineare che il 33,2% non giustifica, o lo fa non correttamente, il procedimento per trovare il prodotto massimo senza realizzare nessuna moltiplicazione, e il 41,6% non riesce a fare la generalizzazione dell'enunciato.

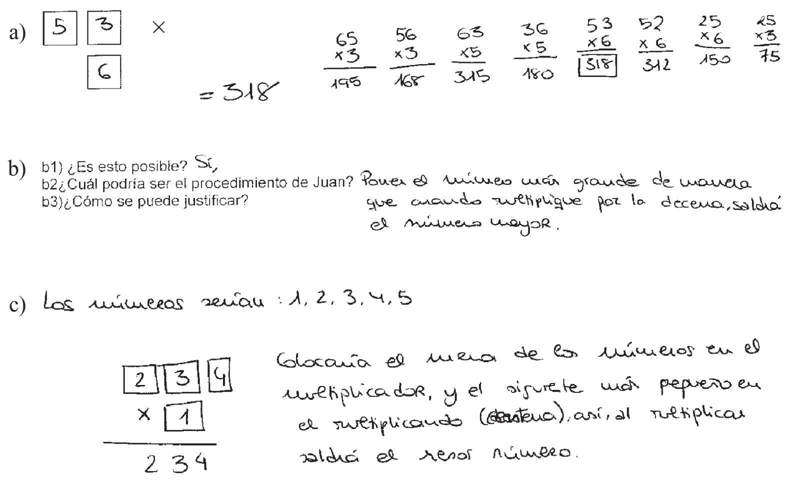
Tavola 1 Tipi di risposte, frequenza e percentuale

Paragrafo b)	Frequenza	%
Giustifica bene	12	50,0
Giustifica moderatamente bene	4	16,6
Non giustifica/non correttamente	8	33,2
TOTALE	24 gruppi	

Paragrafo c)	Frequenza	%
Generalizza bene	4	16,6
Generalizza moderatamente bene	10	41,6
Non generalizza	10	41,6
TOTALE	24 gruppi	

La tavola 2 include le risposte date da uno dei gruppi che non è riuscito a risolvere bene il problema né ad elaborare argomenti pertinenti. Abbiamo visto che ha effettuato otto moltiplicazioni prima di concludere che la soluzione è 53×6=318, senza scartare il 2 come possibile cifra del moltiplicando, tanto nelle unità come nelle decine. Questi studenti non argomentano perché non continuano facendo le restanti verifiche. Nel paragrafo b) descrivono, in modo incompleto, il procedimento (mettere il numero più grande …). Nel paragrafo c) l'espressione «Dati cinque numeri naturali qualsiasi», nonostante si suggerisca loro l'uso delle lettere per esprimere tali numeri, optano per ragionare con un caso concreto, usando i numeri 1, 2, 3, 4, 5 e anche in questo caso in modo incompleto.

Tavola 2 Risposte di un gruppo che non è riuscito a generalizzare


a) 5 3 × 6 = 318
65×3 = 195; 56×3 = 168; 63×5 = 315; 36×5 = 180; 53×6 = 318; 52×6 = 312; 25×6 = 150; 25×3 = 75

b) b1) ¿Es esto posible? Sí,
b2¿Cuál podría ser el procedimiento de Juan? Poner el número más grande de manera que cuando multiplique por la decena, saldrá el número mayor.
b3)¿Cómo se puede justificar?

c) Los números serían: 1, 2, 3, 4, 5
2 3 4 × 1 = 2 3 4
Colocaría el menor de los números en el multiplicador, y el siguiente más pequeño en el multiplicando (~~[illegible]~~), así, al multiplicar saldrá el menor número.

Nella tavola 3 riassumiamo i tipi di oggetti, significati e conflitti che incontriamo nelle risposte del gruppo considerato, come esempio illustrativo della caratterizzazione delle configurazioni cognitive, usando le strumentazioni teoriche descritte nel paragrafo 4.

Tavola 3 Configurazione cognitiva di un gruppo che non è riuscito a generalizzare

Tipi di oggetti	**Significati/Conflitti**
LINGUAGGI	
– Esempi di selezioni possibili dei numeri usati come moltiplicando e moltiplicatore. – Scrittura della moltiplicazione con i fattori messi in colonna. – Descrizione di procedimenti e giustificazioni incomplete.	– Attribuiscono il significato corretto ai termini e alle espressioni usate nell'enunciato, includendo il formato della moltiplicazione in colonna che riproducono fedelmente. – Rigidezza nel modo di scrivere le moltiplicazioni, seguendo il formato dell'enunciato. – Forma incompleta e insufficiente nell'esprimere procedimenti e argomenti.
CONCETTI	
– Decine, centinaia – Moltiplicazione, prodotto massimo	– Uso corretto.
– Procedimento – Insieme di scelte possibili	– Non riconoscono l'insieme completo di configurazioni possibili
– «Numero qualsiasi»	– Il numero qualsiasi è interpretato come caso «particolare specifico».
PROCEDIMENTI	
– Moltiplicazione per una cifra	– Uso corretto.
– Verifica dei casi in a) e b)	– Non verificano tutti i casi possibili.
– Danno valori particolari alle variabili in c)	– Non riescono a descrivere il procedimento generale per ottenere il prodotto minimo nelle condizioni date (supporre un ordine nelle variabili a, b, ... etc.).
PROPRIETÀ	
– Regole del sistema di numerazione decimale e dell'algoritmo della moltiplicazione.	– Uso corretto.
– Non riconoscono la proprietà «a maggior fattore, minor prodotto» in a)	– Non riconoscono l'uso del numero 2.
ARGOMENTI	
– Verifiche parziali dei casi (a)	– Non riescono a fare la verifica esaustiva dei casi.
– Uso di un caso particolare come «elemento generico»	– Non argomentano deduttivamente.

6. Riflessione epistemica-cognitiva degli insegnanti in formazione

Nella prima fase del ciclo formativo che applichiamo agli insegnanti in formazione, proponiamo loro la risoluzione di un problema matematico, opportunamente selezionato affinché si sviluppino le loro competenze in temi matematici relazionati alla professione docente. Il percorso didattico dello studio matematico che implementiamo contempla fasi o momenti di esplorazione personale del problema, lavoro collaborativo in gruppo, formulazione e validazione delle situazioni proposte. Questi momenti di tipo socio-costruttivista sono integrati con momenti di istituzionalizzazione, esercitazione e studio personale di fonti documentali selezionate, che apportano una componente istruzionale al modello didattico.

Però la formazione dell'insegnante non deve limitarsi a sviluppare competenze matematiche acquisite mediante un modello didattico determinato, che possono tentare di imitare con i propri alunni. È necessario che sviluppino, anche, competenze di riflessione e analisi sulla propria attività matematica e sulle conoscenze mobilitate, affinché possano selezionare o adattare problemi matematici idonei e ricostruire le configurazioni di oggetti e significati posti in gioco.

Con questo fine abbiamo illustrato un tipo di situazioni di analisi epistemico-cognitive basate sulla proposta della seguente consegna, dopo la realizzazione di un'attività matematica come quella descritta nel paragrafo 2:

Quali conoscenze matematiche si mettono in gioco nella risoluzione del problema? Completare la tavola allegata indicando gli oggetti matematici e i significati posti in gioco.

Oggetti:[5]	Significati:
Situazioni-problemi	
Elementi linguistici	
Concetti-definizioni	
Proprietà	
Procedimenti	
Argomenti	
Conflitti:	

Con questa consegna si richiede che gli studenti riconoscano, oltre ai concetti, anche i procedimenti, il ruolo dei singoli linguaggi usati e i significati attribuiti ai termini e alle espressioni, i modelli di giustificazione di proprietà e di procedimenti, i processi di argomentazione e di generalizzazione. Si tratta di creare il punto di partenza affinché l'insegnante in formazione realizzi un tipo di analisi come quello incluso nel paragrafo 4. L'obiettivo è che l'insegnante sia cosciente della trama di obiettivi e significati che si pongono in gioco nei processi di studio matematico che dovranno progettare, implementare e valutare.

Per affrontare queste questioni di analisi epistemico-cognitive implementiamo, di nuovo, un percorso didattico che contempla i seguenti momenti:

– Esplorazione personale.
– Lavoro collaborativo nel senso di partecipazione a un gruppo per discutere le proposte ed elaborare una risposta condivisa.
– Partecipazione e discussione nel gruppo-classe.
– Giustificazione effettuata dal formatore.

Stiamo sperimentando questa situazione-problema di «analisi epistemico-cognitiva» con diversi gruppi di studenti e diversi problemi matematici elementari. Come prime conclusioni di queste esperienze possiamo dire che l'attività è una sfida per i nuovi insegnanti, dal momento che l'identificazione e la discriminazione dei tipi di obiettivi e significati risulta conflittuale, giacché usualmente suppone un certo livello di attività metacognitiva alla quale non sono abituati.

5. Nella versione consegnata agli studenti si include un esempio di ogni tipo di entità matematica per orientare la realizzazione delle attività.

7. Riflessioni finali

L'analisi che abbiamo esposto nei paragrafi precedenti, usando alcune nozioni teoriche dell'«approccio ontosemiotico», è stata realizzata dai ricercatori come elemento di riferimento e riflessione sui tipi di obiettivi e significati matematici posti in gioco dagli studenti. Abbiamo potuto determinare le carenze di questo campione di studenti rispetto alle conoscenze matematiche poste in gioco, in particolare le difficoltà che hanno per usare le notazioni simboliche come ricorso per la generalizzazione; abbiamo anche constatato l'ancoraggio di questi studenti ai ragionamenti di tipo empirico.

Anche se questo tipo di analisi si rivela utile per il formatore di insegnanti, pensiamo che sia possibile e auspicabile abilitare i futuri insegnanti a realizzare analisi simili delle proprie esperienze di insegnamento e apprendimento. Nel nostro progetto di ricerca in corso su «Valutazione e sviluppo delle competenze di analisi didattica dell'insegnante di matematica» la risoluzione di problemi occupa un posto centrale per lo sviluppo delle competenze matematiche. Però l'attività di risoluzione si integra con la riflessione epistemico-cognitiva provocata dai quesiti: *Che matematica si mette in gioco nella risoluzione del problema? Che matematica ha messo in gioco l'alunno?*; queste domande sono basate sull'uso della strumentazione teorica dell'«approccio ontosemiotico», realizzate in questo caso nello strumento citato.

Il tipo di analisi della «matematica in azione» che realizziamo in questo lavoro dovrebbe essere una competenza strumentale dell'insegnante di matematica che gli permette di riconoscere la complessità di oggetti e significati matematici posti in gioco nelle attività matematiche, di prevedere eventuali conflitti, di adattarli alle capacità dei suoi allievi e agli obiettivi di apprendimento. Si tratta di progettare e implementare situazioni didattiche per la formazione degli insegnanti il cui obiettivo centrale sia la meta-analisi (Jaworski, 2005) di una componente chiave dell'insegnamento: l'attività matematica intesa tanto dal punto di vista istituzionale (o socio-epistemico) quanto dal punto di vista personale (o cognitivo).

Come abbiamo indicato nel paragrafo 2, il ciclo formativo che stiamo sperimentando con i futuri insegnanti include, oltre alle situazioni di studio matematico di problemi scelti e alla riflessione epistemico-cognitiva corrispondente, altri tre tipi di analisi e di riflessione: analisi delle interazioni in aula, riconoscimento delle norme che condizionano e sostengono l'attività di studio matematico e la valutazione dell'attività didattica generale di esperienze di insegnamento e apprendimento. Per ragioni di spazio non includiamo in questo lavoro queste analisi applicate al caso della risoluzione del problema aritmetico-algebrico sviluppato nei paragrafi precedenti. Rinviamo il lettore ai riferimenti citati dove si descrivono le analisi indicate; in particolare in Godino, Font e Wilhelmi (in corso di stampa) si presentano le principali strumentazioni teoriche dell'«approccio ontosemiotico» mediante l'analisi di una esperienza di insegnamento dell'analisi elementare dei dati.

Ringraziamento

Lavoro realizzato nell'ambito del progetto di ricerca, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

Bibliografia

D'Amore, B., Godino, J. D., Arrigo, G. e Fandiño, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Font, J. D., Godino, J. D., D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2): 127-135. [Versione in spagnolo, ampliata e aggiornata disponibile in Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino]

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.*

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (in corso di stampa). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *PUBLICACIONES.* Revista de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

González, J., Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in Europe. Final Report. Phase one*. Bilbao: Universidad de Deusto. http://europa.eu.int/comm/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 359-361.

Malaspina, U. (2007). El rincón de los problemas. *UNIÓN*, 11, 197-204.

Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (I). *Herramientas*, 56, 20-30.

Traduzione di Ines Marazzani

4. Ricerca e sviluppo per l'insegnamento della matematica nella scuola elementare: il caso dell'enumerazione

Claire Margolinas[1]

The conference offers to explore, in the case of enumeration, a development approach of mathematics documents for primary school teachers, based on researches in mathematics education.

1. Un approccio allo sviluppo

1.1. Diversi punti di vista sulla ricerca e sullo sviluppo

A seconda dei paesi e delle discipline, le tradizioni di ricerca nelle varie didattiche intrattengono rapporti più o meno stretti con lo sviluppo e l'innovazione. In Francia e in matematica, è prassi comune distinguere abbastanza nettamente tra quelle ricerche fondamentali che, in didattica come in altre discipline, mirano ad aumentare le nostre conoscenze sui fenomeni che si producono nell'insegnamento della matematica, e quelle applicate che mirano a produrre sviluppi nelle pratiche d'insegnamento (Margolinas, 2005).

Tali distinzioni non regolano la questione delle relazioni fra la ricerca fondamentale e la ricerca di sviluppo. In effetti, la ricerca fondamentale fa spesso ricorso all'ingegneria per produrre risultati, ciò che conduce necessariamente ad affrontare la realtà delle classi e a costruire, per queste classi, sequenze che sono a volte interpretate come «proposte didattiche» suscettibili, previo certi adattamenti, di essere proposte nelle classi ordinarie, in contraddizione persino con le intenzioni dei loro autori (Brousseau, 1998).

È senza dubbio a causa di questa apparente prossimità fra ingegneria e pratica di classe che uno schema classico per descrivere le relazioni fra ricerca fondamentale e sviluppo può essere riassunto così (Margolinas, Mercier, e René de Cotret, 2007):

> si immagina – idealmente – una specie di catena discendente dalla ricerca fondamentale all'ingegneria, allo sviluppo e all'insegnamento che, da parte sua, fornisce di ritorno una parte delle domande alla ricerca fondamentale. Anche se questo schema non si trova mai scritto tale e quale, sembra essere sotto-giacente a certe concezioni sulle relazioni tra ricerca e insegnamento; per convincersene si pensi ai discorsi sulla «teoria» sulla «pratica» e su «l'articolazione teoria-pratica».

1. Claire Margolinas, Laboratoire PAEDI, IUFM d'Auvergne e Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, France.

Il nostro approccio[2] è abbastanza diverso. In effetti, noi avanziamo l'ipotesi che un numero sufficiente di documenti destinati alle classi (manuali, libri per l'insegnante, schedari ecc.) siano attualmente disponibili, ma che gli insegnanti possano avere, su certi temi, difficoltà nel dar seguito a scelte didattiche coerenti nelle varie situazioni nelle quali si trovano: comprensione delle strategie degli allievi in certe situazioni, risposte dirette a domande degli allievi, scelte fra le situazioni proposte dai manuali, pianificazione e organizzazione dell'insegnamento, ecc. Un tale approccio ci conduce a estrarre, dai lavori della ricerca fondamentale, gli elementi epistemologici di comprensione dei saperi matematici che, più sovente, non sono stati oggetto di diffusione verso gli insegnanti e a chiederci come una loro diffusione possa essere possibile.

È il risultato di un tale approccio che vi propongo di delineare in questa sede.

1.2. L'enumerazione

Il primo soggetto che abbiamo deciso di trattare concerne *l'enumerazione*, termine che, in francese come in italiano, non è corrente oppure è confuso con quello di numerazione. In questo paragrafo, chiarirò rapidamente di che cosa si tratta, citando direttamente (Briand, 1999), la cui tesi sotto la la direzione di Guy Brousseau (Briand, 1993) ha esplorato questo concetto.

> «[…] per controllare una situazione di conteggio, il bambino deve far funzionare una conoscenza (l'enumerazione) che si riferisce all'esplorazione della collezione e che condiziona completamente il corretto svolgimento dell'attività». (p. 52)

Egli descrive allora il caso di un allievo che deve contare il numero di elementi (alberi disegnati su un foglio di carta) e che non ci riesce, anche se sa recitare ordinatamente i nomi dei numeri. Ecco come l'autore analizza questa difficoltà:

> «Qual è la natura del problema che incontra questo allievo? Essa non concerne le conoscenze relative al numero. Il bambino non riesce pur disponendo della successione numerica e di un procedimento di esplorazione relativamente ben organizzato (due percorsi). Si tratta dunque di una assenza di conoscenza (l'enumerazione) che si manifesta attraverso l'assenza di sincronizzazione effettiva tra una conoscenza numerica e un'organizzazione congiunta della collezione che impedisce l'inventario della collezione». (p. 53)

Briand dà allora una descrizione dell'attività:

> «Per contare il numero di elementi di una collezione finita mostrata, l'allievo deve necessariamente:
>
> *1. Essere capace di distinguere due elementi diversi di un dato insieme.*
> *2. Scegliere un elemento di una collezione.*
> 3. Enunciare un termine numero («uno» o il successivo del precedente in una successione di termini-numeri).
> *4. Conservare la memoria della collezione degli elementi già scelti.*
> *5. Concepire la collezione degli oggetti non ancora scelti.*
> *6. Ricominciare (per la collezione degli oggetti non ancora scelti) 2-3-4-5 finché la collezione degli oggetti da scegliere non è vuota.*
> *7. Sapere che si è scelto l'ultimo elemento.*
> 8. Enunciare l'ultimo termine-numero». (p. 53)

2. Groupe Développement des Mathématiques à l'Ecole (Démathé), INRP, la cui composizione è variabile dalla sua creazione nel 2003.

Le fasi in italico caratterizzano una conoscenza non insegnata che Briand chiama *enumerazione.* La messa in evidenza utilizzata dall'autore mostra l'importanza di queste tappe, spesso ignorate nei confronti di quelle che fanno intervenire i «termini-numeri» (solo 3 e 8).

Affermiamo che l'enumerazione è l'atto *di organizzazione di una collezione* che permette di percorrerla in modo sistematico e dunque ordinato.

L'enumerazione è necessaria al conteggio, ma non dipende dalla conoscenza della sequenza di termini. Briand ha mostrato che esistono situazioni di enumerazione senza conteggio e che l'enumerazione è insegnabile (Briand, Loubet, e Salin, 2004). È nel quadro di queste situazioni di enumerazione «pure» che egli ha raffinato l'analisi delle variabili concernenti l'enumerazione.

La sua analisi permette di capire le difficoltà in gioco in item di valutazione ormai classici, come quelli che si possono trovare sul sito del ministero dell'educazione nazionale in Francia[3]. Gli allievi che devono «contare i gettoni» disposti in linea (14 gettoni) o disordinatamente (8 gettoni) presentano difficoltà di enumerazione: saltano alcuni gettoni o contano lo stesso più volte, per lo più senza denotare difficoltà nell'enunciato della sequenza di termini numerici. Osserviamo che gli ideatori di questa valutazione hanno scelto un numero di gettoni da contare «nel disordine» (variabile che complica l'enumerazione) circa la metà di quello dei gettoni «in linea». In queste condizioni, si ottengono gli stessi risultati nelle due configurazioni.

1.3. Una questione di forma… e di fondo

Il nostro approccio consiste nel produrre documenti per l'insegnante e le descrizioni come quelle precedenti non ci sembrano necessariamente appropriate, per molte ragioni. Prima di tutto non è facile rappresentare precisamente che cosa implica ciascuna delle tappe dell'enumerazione. Poi l'insegnante si interessa a questo problema solo se constata difficoltà negli allievi; ora in questa descrizione, anche se tali difficoltà sono evocate, bisogna comunque ricostruirle.

È per questo che, senza seguire alcuna «moda» e alcuna intenzione di partenza, abbiamo deciso di scegliere un CD-Rom come supporto del nostro documento. Infatti, è molto facile, con l'aiuto di una sequenza video, mostrare le azioni effettive degli allievi impegnati nell'enumerazione, mentre la descrizione testuale è scomoda (Margolinas, Wozniak, De Redon, e Rivière, 2007). Inoltre, l'uso di un video-clip permette all'insegnante di ritrovarsi, come in classe, nella situazione di osservare le azioni degli allievi, ciò che gli consente di capire meglio e di reinvestire tutto ciò nella situazione della classe, con più facilità. È proprio perché questa dimensione di osservazione ci sembra essere al centro del lavoro dell'insegnante (Margolinas, 2002) che abbiamo optato per questa forma. Infatti, pensiamo che l'osservazione delle difficoltà degli allievi è un motore dello sviluppo delle pratiche degli insegnanti, ciò che ci conferma i risultati di una ricerca (Margolinas e Wozniak, accettata) che abbiamo compiuto.

Riferire su questo lavoro con un testo non è cosa facile, tanto è importante il supporto adottato nel quadro dell'intero lavoro; nel seguito cercherò comunque di dare alcuni elementi.

3. http://www.banqoutils.education.gouv.fr/fic/ECPCAB01.pdf (consultato il 13.4.2008).

2. L’importanza dell’enumerazione negli apprendimenti

2.1. L’enumerazione e le altre discipline

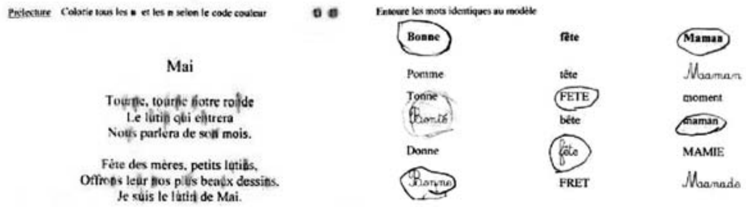


Figura 1 L’enumerazione in prelettura

L’enumerazione interviene raramente isolata da altre attività, in un primo tempo, noi l’abbiamo incontrata nel quadro dell’enunciazione dei numeri. In realtà, non è peculiarità del dominio della matematica. Esistono infatti numerosissime attività per le quali occorre percorrere una collezione in modo ordinato e controllato.

Ecco due esempi molto frequenti in prelettura, che abbiamo raccolto nella sezione dei grandi di una scuola materna (allievi di 5-6 anni), nel mese di maggio. Nel primo si tratta di trovare delle lettere seguendo un modello. Occorre quindi percorrere l’intera collezione per trovare le lettere *u* e *n* del modello. Nel secondo, bisogna percorrere tutta la collezione di parole per trovare la parola del modello. Questa seconda scheda nasconde infatti un’altra attività di enumerazione, perché i bambini non sanno leggere. Quando esaminano una parola, devono confrontare le sue lettere con quelle del modello, ad una ad una, nell’ordine.

Nelle nostre osservazioni alla scuola materna, abbiamo notato che, per gli allievi più deboli, per i quali il riconoscimento della lettera o della parola risulta già difficile, il percorrere la collezione delle lettere o delle parole non è per nulla un fatto scontato. Sono confrontati con una doppia difficoltà: quella della lettura, che è conosciuta dall’insegnante, e quella dell’enumerazione, che spesso non è considerata.

Adesso che avete questa chiave di osservazione, vedrete dell’enumerazione dappertutto… effettivamente enumerare è un’attività molto corrente, combinata con ogni tipo di attività, matematica e no.

2.2. Ricerca di una situazione

Per meglio capire le difficoltà legate all’enumerazione, può essere importante osservarle in situazioni nelle quali l’enumerazione interviene da sola (o principalmente), mentre abbiamo appena visto che l’enumerazione interviene in numerose situazioni nelle quali è legata ad altre conoscenze e, per questo, spesso mal identificata. Abbiamo concepito una situazione particolarmente destinata all’osservazione.

Una situazione di enumerazione necessita la costruzione di un percorso ordinato e controllato. La difficoltà, soprattutto se si cerca una situazione senza enunciazione dei numeri, è di trovare un mezzo per giustificare questo percorso. La nostra soluzione (il lettore ne potrà trovare altre, non ne dubito!) consiste nel disporre di piccoli oggetti (nel CD-Rom sono zollette di zucchero) su un tavolo e nel nasconderli sotto piccoli «cappelli» di carta (vedere figura 2).

Figura 2 Una situazione di enumerazione

L'allievo deve recuperare tutti gli zuccherini nascosti sotto i cappelli, sollevando un solo cappello, prendere lo zucchero, depositarlo nella scatola e rimettere il cappello al suo posto (il posto è segnato con una croce sul foglio). Se solleva un cappello e non vi trova lo zucchero, ha perso. Quando l'allievo dichiara di aver finito, si levano tutti i cappelli: se tutti gli zuccherini sono stati trovati, l'allievo ha vinto.

Osservazione di una situazione di enumerazione

Abbiamo osservato allievi fuori dalla classe in questa situazione, da una sezione media della scuola materna (allievi di 4-5 anni) fino al CM2 (allievi di 10-11 anni). Notiamo dapprima che c'è una grandissima diversità di riuscite e di insuccessi (vi sono allievi giovani che riescono e allievi meno giovani che non riescono), ciò che è caratteristica di una conoscenza che, non essendo insegnata, evolve poco. Per il resto, le strategie degli allievi mostrano sicuramente un'organizzazione più o meno efficace.

Alcuni allievi (come Olivia, 8 anni) sollevano cappelli sul foglio senza un'organizzazione visibile. Il loro insuccesso è prevedibile.

La maggior parte degli allievi che riescono trattano separatamente due sotto-collezioni: una sotto-collezione composta dei cinque elementi a sinistra sulla figura 2 e una sotto-collezione composta dei dieci elementi restanti. La sotto-collezione di sinistra, poco numerosa, è enumerata abbastanza facilmente. Per contro, molti allievi hanno difficoltà con la sotto-collezione di destra composta di dieci elementi.

Quelli che riescono, percorrono questa sotto-collezione ricorrendo alle due organizzazioni sottogiacenti alla logica grafica (Goody, 1977/1979): le linee e le colonne. Il riconoscimento di queste organizzazioni permette di capire che l'enumerazione non è «naturale», ma che si costruisce: è una conoscenza. Permette anche di considerare la disposizione dei punti da enumerare come un gioco di variabili: tanto più questa disposizione è vicina a un'organizzazione facile da identificare, come quelle delle linee o delle colonne, quanto più l'enumerazione è semplice. Durante la conferenza avrò l'occasione di illustrare questo punto con le sequenze video che abbiamo raccolto.

A mio avviso, questa analisi permette all'insegnante di svolgere parecchie cose importanti. In un compito nel quale l'enumerazione interviene (non necessariamente in modo isolato) consente di identificare le difficoltà specifiche, ciò che permette all'insegnante di *prendere decisioni*. Infatti, se l'oggetto del lavoro non è l'enumerazione, ma questa infastidisce, l'insegnante può modificare l'esercizio prima e semplificare la portata dell'enumerazione stessa. Al contrario, quando desidera che gli allievi lavorino sulle conoscenze dell'enumerazione, l'insegnante può lasciarla completamente a loro carico in modo che ci lavorino. Quando lo giudica opportuno può mostrare agli allievi che è possibile organizzare l'enumerazione appoggiandosi su disposizioni di base (come righe e colonne). Infatti, anche se è possibile insegnare l'enumerazione, come ha dimostrato Briand, non è altrettanto possibile aver cura, come nel caso delle altre conoscenze, di permettere il suo apprendimento, anche in situazioni non specifiche. Le situazioni abitualmente vissute alla scuola materna forniscono frequentemente simili occasioni.

Ciò che qui è importante è che noi mostriamo, nel caso dell'enumerazione, che la «capacità di organizzarsi», che è sovente descritta dagli insegnanti come una «proprietà dell'allievo» (questo non sa organizzarsi!), è in realtà una conoscenza che può essere sviluppata.

Ciò che ci pare ugualmente importante è che questa analisi non dipende da un particolare tipo di insegnamento, ma è peculiarità dell'insegnante. In un certo senso agisce sulle relazioni tra le ricerche in didattica della matematica e gli insegnanti. Pensiamo infatti che può essere importante aiutare gli insegnanti a trovare forme di insegnamento più efficaci, ma anche che questo non è il solo ruolo delle ricerche perché è pure essenziale fornire loro strumenti di scelta migliori per coltivare la loro pratica.

2.3. Prolungamenti

L'enumerazione può essere definita come l'azione *di organizzazione di una collezione* che permette di percorrerla in modo ordinato e controllato:

ordinare: scegliere un primo elemento e il suo successivo; *controllare:* conservare la memoria della scelta precedente, sapere che si è percorso l'intera collezione.

Per ora, abbiamo solo considerato che l'enumerazione di una collezione di oggetti la cui posizione è fissata (come nel caso di punti su un foglio), ciò che era il punto di partenza di Briand.

Quando si considerano oggetti spostabili, il problema si trasforma. Quando si conta una collezione di gettoni, per esempio, si ha all'inizio uno stock di gettoni e si spostano in un luogo specifico i gettoni già contati fino a esaurimento dello stock. L'ordine non ha molta importanza, il controllo è svolto dall'utilizzazione rigorosa dello spazio (non bisogna rimettere nello stock un elemento già contato).

Le nostre osservazioni mostrano (è il secondo capitolo del nostro CD-Rom) che questa enumerazione di oggetti spostabili non è sempre facile e che le variabili di questa situazione sono spesso mal conosciute dagli insegnanti. Nella realtà della classe, l'organizzazione delle collezioni di oggetti spostabili è spesso presa a carico dall'insegnante, in un modo che non permette sempre all'allievo di acquisire conoscenze un po' generali.

Come abbiamo costruito una situazione che ci permette di mostrare agli insegnanti le difficoltà di enumerazione di una collezione fissa, stiamo ora osservando situazioni analoghe concernenti le difficoltà di enumerazione di collezioni di oggetti spostabili. Questi lavori in via di svolgimento saranno presentati «in prima assoluta» durante il convegno!

Conclusione: i gesti dell'attività matematica

Il lavoro che presento qui può sembrare banale, in effetti, l'organizzazione delle collezioni è talvolta considerata come un'attività che va da sé, una «semplice» difficoltà di organizzare le proprie azioni. Per capire queste difficoltà, bisogna infatti interessarsi in modo preciso a ciò che l'allievo fa con le sue mani, osservare dove deposita gli oggetti che deve manipolare. Siamo ben lontani dalla prova, dall'argomentazione, ancor più dalla dimostrazione, che dà alla matematica il suo titolo di nobiltà!

Il nostro interesse non è però casuale, perché Guy Brousseau (1998, che sintetizza lavori effettuati a partire dagli anni 60) ha mostrato l'importanza dei *modelli impliciti di azione* che sono i generatori delle conoscenze.

Eppure, in generale, i gesti dell'attività matematica, nella loro dimensione materiale, non sono quasi mai considerati come rilevanti per l'apprendimento e ancora meno per l'insegnamento. Si osserva così che troppo spesso la manipolazione di strumenti semplici come la riga, per non parlare delle forbici, è sottovalutata nel quadro scolastico, anche se l'insegnante deplora il cattivo uso che ne fanno gli allievi, senza però intraprendere un'azione effettiva per migliorarne l'efficacia.

Tutto avviene come se l'allievo avesse dovuto imparare altrove, nell'ambiente sociale e principalmente in famiglia, certi gesti necessari per la riuscita nello svolgimento dei compiti scolastici. E pertanto, noi mostriamo che ciò non avviene. C'è un grande malinteso, persino sfiducia, tra la scuola e le famiglie, le cui origini sono senza dubbio molteplici e una di queste potrebbe essere ricercata nelle interazioni tra i cambiamenti delle pratiche sociali e gli imperativi scolastici (Margolinas, René de Cotret, e Giroux, 2006). Il caso dell'organizzazione delle collezioni ci sembra abbastanza emblematico di queste tensioni, in effetti, se la famiglia fornisce al bambino numerose occasioni di organizzare collezioni complesse (la selezione delle lenticchie, per esempio), la scuola non ha allora il compito specifico di organizzare un incontro tra l'allievo e questi tipi di situazioni.

Così, l'impressione di «banalità» delle conoscenze legate all'organizzazione delle collezioni e all'enumerazione è forse da mettere in relazione con una non legittimità storica di queste conoscenze nel quadro scolastico, che le trasformazioni sociali obbligano a riconsiderare.

Bibliografia

Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 41-76.

Briand, J., Loubet, M., e Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris Hatier.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage.

Goody, J. (1977/1979). *La raison graphique* (J. Bazin e A. Bensa, Trans.). Paris: Les éditions de minuit.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot e R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2005). Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation, 27*(3), 343-360.

Margolinas, C., Mercier, A., e René de Cotret, S. (2007). Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas e A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques? Actes des journées mathématiques INRP 14 et 15 juin 2006* (pp. 25-36). Lyon: INRP.

Margolinas, C., René de Cotret, S., e Giroux, J. (2006). *Transformation de situations sociales et leurs conséquences sur certaines connaissances en jeu en contexte scolaire.* Paper presented at the L'école, lieu de tensions et de médiations: Quels effets sur les pratiques scolaires? Actes du colloque international de l'AFEC, Lille.

Margolinas, C., e Wozniak, F. (accepté). Usage des manuels dans le travail du professeur: l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation* (Numéro spécial: Les manuels scolaires: réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves).

Margolinas, C., Wozniak, F., De Redon, M.-C., e Rivière, O. (2007). Les mathématiques à l'école? Plus complexe qu'il n'y paraît! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée *Bulletin de l'APMEP, 471*.

5. Discussioni epistemologiche sullo statuto dei numeri negativi e delle loro rappresentazioni nei manuali di matematica tedeschi e francesi tra il 1795 e il 1845

Gerd Schubring[1]

The topic of "didactic transposition" is subject of intense discussions in the French mathematics education and it could be connected with German traditions of the "Stoffdidaktik" (subject didactic). In both cases it has to do with relationships between scientific knowledge and students' knowledge, i.e. with the "elementarisation" problem. The article presents a synthesis of some researches and some comparisons among countries, on the development of negative numbers' conception, based on a great deal of documents – research monographs, mathematics philosophical works, historical reports, didactic thoughts, and above all school textbooks.

Il tema della «trasposizione didattica» è stato oggetto di intense discussioni nella didattica della matematica francese e sembrerebbe suscettibile di collegarsi con le tradizioni tedesche della «Stoffdidaktik» (didattica disciplinare). Nei due casi si tratta dei rapporti esistenti tra sapere scientifico e sapere scolastico, cioè del problema dell'«elementarizzazione». Ricerche sulle varie dimensioni che prende l'elementarizzazione – ricerche storiche ed epistemologiche –, a partire dai programmi e dalle relative istruzioni, dai manuali e dalle concezioni didattiche appaiono molto importanti per la didattica della matematica.

Per accedere effettivamente a un punto di vista globale su questo modo di porre il problema, non bisogna concepire la trasposizione o l'elementarizzazione in senso semplicistico, come se il rapporto tra sapere scientifico e sapere scolastico fosse a senso unico, con un polo scientifico solo donatore e un polo didattico continuamente ricettore che traspone passivamente nell'insegnamento ciò che ha ricevuto passivamente. W. Kuyk ha denunciato nel 1978 – con la bella immagine della stalactite e della stalagmite – il carattere stretto e unilaterale di questo punto di vista: l'insegnamento non può essere semplicemente assimilato a una stalagmite sulla quale la scienza, come una stalactite che cresce, lascia cadere qualche goccia. Infatti non si possono concepire lo sviluppo del sapere scientifico e di quello scolastico come due processi indipendenti o dipendenti a senso unico (Schubrig, 1982).

Dunque, se già il rapporto tra scienza e insegnamento è da esaminare in modo più approfondito, occorrerà fare altrettanto con il sapere scolastico. Occorre dire che non c'è un sapere scolastico, ma più insiemi di saperi scolastici, diversi gli uni dagli altri, caratterizzati dai diversi gruppi che li rappresentano o ai quali si rivolgono. Mi limito a citare la matematica per ingegneri (insegnata negli istituti tecnici), la matematica liceale o la desueta didattica del calcolo con l'ermetismo del suo bagaglio di sapere concernente il concetto di numero. La differenza esistente fra questi insiemi di saperi attiene alle diverse funzioni sociali nei vari ambiti sociali e alle diverse mentalità pro-

1. IDM, Universität Bielefeld (Germania).

prie dei gruppi di supporto di questi saperi. Il tipo di sapere scolastico, che ha un'azione predominante sul sapere scientifico e sull'orientamento dei suoi valori, dipende completamente dalle mentalità e dai sistemi di valori dominanti in una data nazione o cultura.

Ma occorre ugualmente analizzare lo sviluppo del sapere scientifico, a partire dai presupposti che vi si fanno implicitamente. Su questo punto, la metodologia dello studio delle mentalità può essere di grande aiuto. Così si vede, in diversi approcci della trasposizione, il presupposto implicito di uno sviluppo storico, che sarebbe anche un progresso permanente, un continuo sviluppo verso l'alto che ingloba a livello generale tutti gli insiemi di saperi precedenti. Insisto sulla necessità di un'analisi di questi presupposti per il fatto che nella concezione degli *ostacoli epistemologici*, una delle teorie costitutive della didattica della matematica francese, interviene implicitamente questa concezione di progresso. In effetti, Gaston Bachelard, al quale dobbiamo lo sviluppo del concetto di ostacolo epistemologico, parte dalla concezione francese classica del razionalismo. Secondo questa concezione, lo sviluppo temporale della scienza è sempre accompagnato da un progresso sempre più completo di comprensione e di chiarimento. La scienza, un po' come nei tre stadi di Piaget, raggiunge necessariamente un livello sempre superiore mediante superamento dei livelli anteriori. Evidentemente in un individuo si possono avere dei ritorni – tali barriere lo possono rinchiudere nel suo processo di apprendimento – ma ciò non può accadere alla scienza.

L'esempio costituito dal «caso» storico del concetto di numero negativo è molto istruttivo dell'influenza reciproca che possono avere l'uno sull'altro sapere scientifico e sapere scolastico, così come l'importanza dei gruppi sociali detentori del sapere, le loro mentalità e la relatività del concetto di progresso. Seguendo i processi legati alle molteplici forme di rifiuto dei numeri negativi, o alla loro accettazione, processi che non derivano in alcun caso da un semplice concatenamento storico, ci si fa un'idea concreta della complessità della trasposizione o dell'elementarizzazione. Seguendo l'idea comunemente ammessa, i Greci e gli Arabi hanno escluso i numeri negativi, le cui prime tracce appaiono solo presso gli Indù. È solo nel XVI secolo, con Viète, che ha inizio lo sviluppo del concetto di numero negativo, accettato dapprima come «falsa soluzione» di equazioni, per poi progressivamente acquisire – secondo l'opinione comune già nel XVII secolo – una posizione riconosciuta in matematica. Gläser ha mostrato nel 1981 che questo processo di riconoscimento si è svolto in modo incredibilmente lento ed è finito solo nel XIX secolo.

Un'analisi precisa mostra infatti che il processo di riconoscimento dei numeri negativi come concetto matematico «legittimo» non si è certamente svolto in modo continuo, ma ha subito forti variazioni a seconda degli ambienti culturali nazionali e ha messo in evidenza rotture e «ritorni al passato». L'evoluzione, le differenze e le rotture si spiegano col fatto che i numeri negativi non costituiscono un concetto isolato all'interno dell'aritmetica, ma scaturiscono dal concetto di numero nell'ambito dei fondamenti della matematica, al punto tale che sono stati considerati una sfida all'intelligenza culturale che si aveva della matematica.

Nel linguaggio matematico, a proposito dei numeri negativi, occorre stabilire la differenza tra un numero e il suo valore assoluto, tra un segno di operazione e il segno stesso che precede il numero. Ma se ci si accontenta di trattare la questione sotto l'aspetto tecnico, è impossibile capire come autori matematici, che erano perfettamente in chiaro su questi concetti, non abbiano voluto accordare il «diritto di cittadinanza» in matematica ai numeri negativi.

Non possiamo capire completamente gli *ostacoli* se non prendendo coscienza del fatto che i numeri negativi rimettono in questione aspetti essenziali dell'architettura e della filosofia della matematica: questa era concepita come «scienza delle quantità», la quantità concepita sia come «discreta» sia come «continua», e in grado di inglobare tutta la matematica, potendosi applicare ovunque. I numeri negativi non si accontentavano solo di obbligare in modo implicito a concepire la matematica in modo diverso, non empirico – nel mondo esterno, nessuna «realtà» diretta poteva essere loro assegnata –, ma rimettevano anche in causa la tradizionale architettura unitaria della matematica, perché i loro aspetti tecnici, citati in precedenza, rendevano implicitamente necessario il passaggio dal concetto generale di quantità-grandezza al concetto di numero astratto. Ma quest'ultimo non può ormai più essere usato come base per lo sviluppo della geometria e da allora diventa inevitabile porsi la domanda relativa alle posizioni reciproche dell'aritmetica-algebra e della geometria: nel senso sia di una coesistenza parallela (che implica però un'assenza di concetti di base comuni), sia di una subordinazione di una disciplina all'altra. A questo punto, il progetto di aritmetizzazione della geometria, che trasformava questa in un'*applicazione* dell'aritmetica e dell'algebra, è stato rifiutato, in una prospettiva culturale ed educativa, da parecchi autori.

Il rapporto stretto dei numeri negativi con l'edificio insiemistico della matematica è una conseguenza della discussione iniziata nel XVIII secolo, sul piano internazionale, attorno allo statuto di questo concetto, discussione principalmente alimentata dalla penetrazione dei numeri immaginari. Molte discussioni sul carattere dei numeri negativi servono anche a chiarire il fondamento e il carattere dei numeri immaginari. Non è quindi affatto casuale se gli attacchi, di per sé rari, che ho potuto trovare (uno russo e uno francese) alla famosa «regola dei segni» («meno per meno uguale più») e che contrapponevano con una «dimostrazione» che «meno per meno uguale meno», sono motivati dall'intenzione di contestare i numeri immaginari.

Del resto, gli approcci appena citati provano che la «regola dei segni» è essenzialmente indipendente dal problema della fondazione dei numeri negativi: non si rifiuta l'idea di operare con i numeri negativi. Di fatto, la regola dei segni ha sollevato prima di tutto un problema sul piano didattico (ostacolo didattico), dovuto al fatto che si è sempre tentato, nell'insegnamento e nei manuali scolastici, di dimostrarla senza voler ammettere il suo carattere di *convenzione*. Il problema della fondazione dei numeri negativi, contrariamente a quello della regola dei segni, ha sfidato sia la scienza sia la didattica.

Ho condotto alcune ricerche e confronti fra paesi sullo sviluppo delle concezioni dei numeri negativi, utilizzando un gran numero di documenti – monografie di ricerca, lavori di filosofia della matematica, presentazioni di carattere storico, riflessioni didattiche e soprattutto manuali scolastici –. Circa i manuali, mi sono sforzato di non studiare solamente i passaggi concernenti direttamente il soggetto (regola dei segni, ecc.) e ho analizzato anche, seguendo un mio programma di analisi storica dei manuali, a tre componenti (sviluppo del concetto preso isolatamente, sviluppo in relazione al cambiamento del campo concettuale, analisi del cambiamento di contesto), manuali di algebra, di geometria analitica, ecc. Per la Francia, il campione analizzato è costituito dai manuali scolastici riconosciuti ufficialmente tra il 1795 e il 1845. Ovviamente non posso presentare in questa sede i risultati dell'indagine: si trovano riassunti in un mio articolo (Schubring, 1986). Mi accontento qui di delineare qualche tendenza dell'evoluzione.

Se confrontiamo le discussioni che hanno avuto luogo a proposito dei numeri negativi nella seconda metà del XVIII secolo nei tre paesi europei aventi le più importanti comunità di matematici, Inghilterra, Francia e Germania, si può constatare sia un'evidente gradualità sia alcune rotture concernenti il «riconoscimento» dei numeri negativi: un rifiuto predominante di questi numeri in Inghilterra, un'attitudine ambigua nei loro confronti in Francia e una teoria largamente accettata, detta delle *quantità opposte* in Germania. Queste grandi differenze mostrano l'importanza delle mentalità nazionali e culturali specifiche e delle filosofie ed epistemologie correnti.

In Inghilterra, senza dubbio sotto l'influsso della filosofia del «senso comune», la sottrazione è stata limitata ai casi «realizzabili», cioè a quelli nei quali il sottraendo non è minore del minuendo e ci si rifiutava per principio di affermare che equazioni di secondo grado potessero avere due soluzioni, in particolare che potessero esistere due radici quadrate algebriche di un numero (per esempio, Maseres, 1758, Frend, 1796).

Si può anche constatare nella celebre *Encyclopédie* l'attitudine ambigua francese nei confronti dei numeri negativi. D'Alembert critica nell'articolo «Négatif» l'insufficienza della spiegazione della natura dei numeri negativi. Li rifiuta quando appaiono come soluzioni di un'equazione che risolve un problema: per lui, la presenza di quantità negative deve condurre alla riformulazione del problema (vedere Encyclopédie, volume 11, p. 73). Questa concezione di una reinterpretazione si è mantenuta in Francia fino alla metà del XIX secolo. Ma d'altra parte le quantità negative sono esplicitamente ammesse in un altro articolo della stessa Encyclopédie: nell'articolo «Quantità (in termini di algebra)», redatto dall'abate de la Chapelle, un filosofo che insegnava anche matematica in un collegio, le *quantità negative* sono indicate come «meno che niente» (ciò che D'Alembert condiderava assurdo).

Per contro, in Germania, la «teoria delle grandezze opposte» è chiaramente una conseguenza di considerazioni filosofiche. Vi si determinano condizioni per l'annullamento di quantità per opposizione reciproca. Di conseguenza, si trova in molti manuali, *prima ancora* della presentazione delle operazioni aritmetiche fondamentali, un paragrafo sulle grandezze opposte, cioè sull'opposizione in sé. Grazie alla possibilità offerta dalla filosofia di opporre quantità in relazione a *una* qualità e di vedere allora queste quantità annullarsi reciprocamente, nel caso di accostamento dell'una all'altra, si introduce un concetto generale di sottrazione che non rimane limitato ai casi in cui il sottraendo non è minore del minuendo. Nel 1763, partendo da una tale presentazione di A. G. Kästner, Immanuel Kant ha d'altronde esplicitamente giustificato per via filosofica il concetto matematico di numero negativo nel suo opuscolo *Versuch, der Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzuführen* (Saggio sull'introduzione filosofica del concetto di grandezze negative). Infine, in Germania, la giustificazione matematica del concetto di numero negativo guadagnò la sua indipendenza di fronte alla filosofia: per la prima volta, Wilckens, un professore di matematica, introdusse, nel 1800, i numeri negativi come soluzioni dell'equazione $a+x=0$ e nel 1817 W. A. Förstermann, professore di liceo, sviluppò una teoria formale dei numeri negativi, distanziandosi esplicitamente dal concetto empirico di quantità e partendo dall'uguaglianza definitoria

$$b - a = b + a', \text{ con } a \in N \text{ e } a + a' = 0$$

In Francia, nella seconda metà del XVIII secolo, è stata tentata un'azione importante di rifiuto della critica di D'Alembert e di sviluppo di una teoria che permettesse di operare con i numeri negativi: si tratta della celebre *Langue des calculs* di Condillac, sfortunatamente rimasta incompleta, pubblicata postuma nel 1798 e finora non ancora studiata nella didattica della matematica. È per questo che non ci si è accorti che questa opera contiene una teoria delle generalizzazioni successive dei concetti e delle operazioni matematiche, in particolare una nuova definizione delle quattro operazioni fondamentali, a livelli di volta in volta più elevati, sviluppando il concetto di numero, per astrazioni successive, a partire da quello di quantità empirica fino a quello di numero algebrico.

La concezione di Condillac non ha potuto imporsi in Francia perché, poco dopo la pubblicazione del libro di Condillac sono apparsi, a partire dal 1801, gli scritti di Lazare Carnot contro i numeri negativi. Questi scritti hanno avuto una grandissima influenza, dovuta alla congiunzione di una svolta filosofica verso una filosofia dell'empirismo e dei cambiamenti strutturali apportati al sistema educativo, congiunzione nel senso del rigetto della filosofia illuminista. Carnot negava all'algebra ogni funzione indipendente e le lasciava solo la possibilità di tradurre i concetti e i risultati della geometria, senza avere il diritto di procedere a generalizzazioni che possano andare oltre. Questo attacco empirico-geometrico della concettualizzazione matematica si è imposto in Francia a partire dal 1810 e ha provocato una rottura nei confronti dell'accettazione dei numeri negativi, fino allora relativamente ammessa. Si può constatare molto bene questa rottura rilevando i bruschi cambiamenti nel testo delle diverse edizioni dei manuali di S. F. Lacroix.

La politica espansionista di Napoleone e l'occupazione parziale della Germania da parte della Francia hanno fatto sì che la discussione matematica in Germania non sia rimasta insensibile a quella che allora si svolgeva in Francia. Parallelamente a «trasmissioni» mediate, si sono avute anche «importazioni» dirette. Un caso istruttivo da questo punto di vista è quello di J.P.W. Stein, uscito dall'*École Polytechnique* nel 1813 e poi attivo come ingegnere-geografo. Rientrato in Germania nel 1815 e divenuto professore di liceo a Trier (Tréves), nei suoi manuali, non assegna all'algebra alcun diritto ad assumere una funzione indipendente, continuando ad esigere che ogni equazione sia traducibile in termini di quantità empiriche. Per lui, lo zero non è un numero.

È nell'ottica della trasmissione della matematica francese che si può analizzare le concezioni del matematico berlinese Martin Ohm. In rottura con la tradizione tedesca anteriore a una teoria delle quantità opposte, Ohm ammette come numeri solo i naturali. Considera i numeri negativi, come anche gli irrazionali, risultati «indicizzati» *a operazioni*. Questa posizione ontologica notevole accordata ai numeri naturali può essere vista come una delle sorgenti evidenti della nota affermazione di Kronecker, secondo la quale solo i naturali sono dati ontologicamente, mentre tutti gli altri tipi di numeri non sono che risultati di operazioni.

Il rapporto che si può stabilire tra il riconoscimento dei numeri negativi e l'architettura globale della matematica si rivela prima di tutto nelle questioni riguardanti l'applicazione dell'algebra alla geometria, particolarmente nella trigonometria e in Francia persino al di là di tutte le questioni relative alla stretta separazione tra aritmetica e algebra. D'altra parte occorre osservare in che misura i tentativi di affinamento delle idee interne alla matematica (per esempio l'introduzione dei concetti di insieme di definizione e di insieme immagine di una funzione) hanno potuto cambiare le concezioni che si avevano della matematica.

Il caso Carnot mostra chiaramente che le posizioni assunte contro i numeri negativi non sono dovute a ostacoli né a blocchi di carattere intellettuale, né a carenza di conoscenze, ma sono decisioni volute in favore di concezioni metodologiche determinate e radicali. La dominanza di una decisione nel senso di una posizione metodologica o epistemologica si rivela in modo del tutto chiaro in un articolo di G.S. Klügel (1795), nel quale l'autore presenta le posizioni opposte prese in Inghilterra e in Germania riguardanti i numeri negativi e spiega la differenza di questo punto di vista appoggiandosi sulla differenza tra il metodo «sintetico» predominante in Inghilterra e il metodo «analitico» tedesco. A volte si spiega questa doppia concezione – in modo subdolo – con l'opposizione tra metodo induttivo e metodo deduttivo oppure tra metodo geometrico e metodo algebrico. Klügel mette l'accento su un punto particolarmente importante nella grande molteplicità dei contenuti e dei cambiamenti di senso che celano, questa doppia definizione di metodi, affermando che il metodo sintetico, in particolare quello degli «Antichi», non tratti che casi particolari, isolati; mentre che il metodo analitico può trattare insieme più casi simili per mezzo, per esempio, di una sola formula, il metodo sintetico studia ogni caso separatamente. Di fatto, quando si vuole discutere solo un problema isolato, è sempre possibile trovare una scappatoia per evitare di avere una soluzione negativa.

Uno dei risultati più istruttivi e importanti delle mie numerose analisi di manuali francesi di aritmetica e di algebra é stato di constatare un cambiamento fondamentale nello stile della struttura di questi libri nel corso del XIX secolo: nel senso che la struttura diventa essenzialmente quella della presentazione e della soluzione di *problemi* particolari e i numeri negativi sono evitati. Ma quando la struttura è quella della presentazione più o meno sistematica di una teoria (o i problemi appaiono a margine o nelle appendici), i numeri negativi non sono più oggetto di rifiuto né di esitazione. Penso che questo passaggio dei manuali dall'orientamento verso problemi all'orientamento verso teorie – che non mi sarei aspettato in modo così marcato – non è necessariamente, o almeno non in maniera evidente, da considerare come un «progresso».

Bibliografia

Schubring G. (1982). Die Mathematik an der école Normale des Jahres XIX. *Wissenschaft und Methode*. In F. Schmithals (Hrg.), Wissen und Bewusstsein. Hamburg, p. 103-133.

Schubring G. (1986). Rupture dans le statut mathémathique des nombres négatifs. *Petit x*, Nr. 12.

6. A quali domande pratiche e teoriche risponde la teoria dei campi concettuali?

Gérard Vergnaud[1]

Theories, as well as research empirical results, assume their meaning through questions to which they deliver an answer. The conceptual fields' theory goal is to offer a frame to the development of students' competences and to the analysis of their activity in situation. Instead of a general theory of thought stages, it provides an essential place to the conceptual content of organization forms of activity implemented in situation categories, as well characterized as possible. This theory of situations and schemes has shown its productivity for additive structures, multiplicative structures, elementary algebra, geometry (Vergnaud et al. 97), even if today there is still much work to be done. Conceptualisation is at the center of schemes' organisation, though often it is implicit or even unconscious. The relation between the operational form and the predicative form of knowledge is one of the most important imperatives of school.

La conoscenza è adattamento. Piaget considerava la conoscenza come processo di sviluppo molto generale, biologico e sociale. È proprio studiando questo processo nei neonati, nei bambini e negli adolescenti che egli ha potuto fornire un punto di vista scientifico nuovo sulla formazione dei concetti, per esempio quelli di spazio, di tempo, di ordine, di numero, di classe logica ecc. Non ha però studiato gli apprendimenti scolastici, ciò che ha lasciato libero il campo per la didattica.

Non ha nemmeno studiato lo sviluppo delle conoscenze negli adulti. Ora è chiaro che si impara e ci si sviluppa a ogni età. Questo fatto è più riconosciuto oggi che non ieri. Ne risulta che le imprese e le istituzioni, per esempio l'Education Nationale, sono condotte a interessarsi a modalità di formazione più ricche di quelle classicamente utilizzate soltanto dieci anni fa.

A che cosa ci si adatta e chi si adatta?

La risposta può essere formulata in due punti:
- l'individuo si adatta alle situazioni;
- si adatta per mezzo dell'evoluzione dell'organizzazione della propria attività.

Questa formulazione rapida lascia evidentemente il campo a numerosi commenti, ma ha il merito di porre immediatamente diverse questioni essenziali:

1. Non si può aggirare la questione teorica del ruolo dell'esperienza, perché è durante l'esperienza che un individuo, adulto o bambino, incontra la maggior parte delle situazioni alle quali deve adattarsi, che si tratti dell'esperienza ordinaria o dell'esperienza professionale.
2. Se si vogliono svolgere situazioni di apprendimento in classe, nelle pratiche di formazione degli insegnanti o sul loro luogo di lavoro, bisogna

1. CNRS e Université Paris 8 (équipe C3U).

ingegnarsi per dare a queste situazioni caratteristiche simili a quelle che spingono normalmente gli individui a sviluppare forme nuove di attività, da soli o con l'aiuto di altri.

3. Dato che la prima funzione della conoscenza è di fare e di riuscire, l'analisi dell'attività in situazione è un mezzo essenziale per capire i processi di apprendimento, per quanto delicata e difficile sia. Passa chiaramente dall'analisi degli errori, delle esitazioni e delle disfunzioni, così come dall'identificazione delle diverse tappe attraverso le quali si costruisce una forma nuova di organizzazione dell'attività.

Un esempio in aritmetica elementare per cominciare

Prendiamo un esempio nel quale bisogna combinare diverse operazioni di moltiplicazione e di divisione, per iniziare. I partecipanti che conoscono già questo esempio mi vorranno scusare: lo ripropongo perché si presta bene all'analisi in termini di schemi e di algoritmi, e per la distinzione tra concetto-in-atto e teorema-in-atto.

La produzione di una fattoria della Beauce è di 2485 quintali di grano.

Fra le domande formulate dagli allievi, figura anche questa:
Quanta farina si può ottenere da questa produzione?

Fra le informazioni disponibili, figura la seguente:
Occorrono 120 kg di grano per fare 100 kg di farina.

Distingueremo due fasi dell'attività: una fase di scelta dei dati e dell'operazione da effettuare, una fase di effettuazione di questa operazione.

La prima fase può per esempio iniziare con un periodo di ricerca e di esitazioni, che può durare abbastanza a lungo per allievi di scuola media o per adulti detti «di livello debole». Poi può essere formulata una proposta; ce n'è una grande varietà:

a. dichiarare che si dovrebbe fare il prodotto in croce, procedura insegnata ovunque, ma poco frequentemente utilizzata in circonstanze normali della vita.
b. pensare di dividere 120 per 100, senza sapere poi come continuare.
c. proporre di dividere 100 per 120, e considerare il risultato così trovato come coefficiente che permette di passare dal grano alla farina.
d. dichiarare che 2485 quintali di grano fanno 248'500 kg di grano, e dividere 248'500 per 120, affermando che, così, si saprà «per cosa moltiplicare 100 kg di farina...»
e. cercare di avvicinarsi progressivamente a 248'500 facendo 1000 volte 120, cioè 120 000; poi di nuovo 1000 volte, poi 100 volte, poi 10 volte, ecc.

Fra la ventina di proposte possibili, cinque o sei possono condurre alla soluzione, le altre all'insuccesso.

La seconda fase consiste nell'effettuare l'operazione decisa nella prima fase: per esempio, nel caso della proposta d), porre la divisione di 248'500 per 120, ed eseguire la procedura di divisione appresa (eliminazione di uno zero al divisore e al dividendo, scelta di un dividendo parziale superiore a 12, ricerca del quoziente massimo, esecuzione della moltiplicazione poi della sottrazione, esame del resto e abbassamento della cifra seguente, e così di seguito...).

Può anche essere effettuata con una calcolatrice.

L'esecuzione dell'attività durante la seconda fase è organizzata da un algoritmo, che ha uno scopo chiaro, regole relativamente complesse insegnate a scuola, una certa rappresentazione di oggetti-segni sulla carta e loro significato, scelte e attese. Per esempio certi allievi sono presi alla sprovvista quando il dividendo parziale, dopo l'abbassamento della cifra seguente, è inferiore al divisore: abbasso l'8 ma è minore di 12 (Brun et al, 1994).

È più delicato descrivere l'organizzazione dell'attività durante la prima fase. C'è un obiettivo che si declina in sotto-obiettivi diversi secondo la strada imboccata. La scelta di un sotto-obiettivo piuttosto che un altro è un indice importante per l'insegnante. Infatti la scelta va di pari passo con quella dei dati e delle operazioni da effettuare per primi, per secondi ecc. Stessa cosa per la rappresentazione delle grandezze in gioco e delle loro relazioni, cioè per la loro concettualizzazione. Infatti le relazioni fra grandezze sono di una difficoltà concettuale senza uguali: «Quante volte di più...?» si riferisce a una relazione fra grandezze della stessa natura; così come la scomposizione additiva 1000 volte 120 e ancora 1000 volte 120, ecc. Per contro, la divisione di 120 per 100 o di 100 per 120 mettono in gioco grandezze di natura diversa. O si interpretano queste divisioni come quozienti di dimensioni – ma si sa oggi che gli allievi incontrano difficoltà nel concepire questa operazione di divisione – oppure si considera la divisione di 120 per 100 come il mezzo per trovare la quantità di grano corrispondente a un kg di farina, nel qual caso 100 non designa più 100 kg di farina ma la relazione di confronto «100 volte meno», che è un numero senza dimensione, uno scalare.

Ogni approccio possibile nella ricerca di un quarto proporzionale è suscettibile di diventare uno schema. Alcuni non conducono alla riuscita; in generale vengono abbandonati, spesso prima ancora di essere stati stabilizzati. Altri sono rinforzati a tal punto che finiscono per eliminare gli altri. Più frequentemente ogni soggetto dispone di diversi schemi alternativi fra i quali può scegliere in funzione dei valori delle variabili di situazione e precisamente dei valori numerici. Le ricerche mostrano perciò che alcuni individui dispongono di un'intera panoplia mentre altri non hanno che una sola corda al loro arco.

Secondo esempio

Un meccanico riparatore di automobili sperimentato si vede confidare la responsabilità di accogliere i clienti che portano la loro vettura per riparazione. In questa nuova funzione, il ricezionista ha come primo obiettivo, nei 5-15 minuti di cui dispone, di ottenere dal cliente una informazione il più possibile affidabile sul problema meccanico in questione; la sua competenza di meccanico è dunque essenziale. Deve perciò ascoltare il cliente, porre domande pertinenti, sia per saperne di più di quello che il (o la) cliente è in grado di dire, sia per scartare le diagnosi errate che il cliente propone. Uno studio approfondito condotto da Patrick Mayen (Mayen, 1998) ha mostrato che, parallelamente a questo primo obiettivo, esistono due altri elementi di dialogo con il cliente: rassicurarlo (su tempi, prezzo, garanzia…) e renderlo fiducioso. È chiaro che l'accoglienza deve soddisfare il cliente e stimolarlo a ritornare la prossima volta, evitando così che si rivolga alla concorrenza. L'attività di dialogo promossa dal ricezionista è così organizzata attorno a questi tre aspetti, senza che vi sia un piano prestabilito. Le competenze conversazionali del ricezionista e la sua capacità di adattarsi ai propositi dell'interlocutore sono necessarie tanto quanto le competenze di meccanico. Non è solo in officina che ha potuto svilupparle, ma nel corso di tutta la sua esperienza relativa alla conversazione, alla correttezza, all'amabilità, all'humour, … Inoltre, con l'esperienza di ricezionista, egli sviluppa una nuova professionalità.

Terzo esempio

In un cementificio i camion adibiti al trasporto del cemento sono dotati di pompe idrauliche di una certa complessità. Capita che si guastino. Le pompe non sono tutte identiche, il tipo di guasti nemmeno, anche sullo stesso tipo di pompa. Un giorno uno dei tecnici della manutenzione si ammala e deve essere ricoverato in ospedale. L'effetto immediato è che, in officina, nessuno è in grado di riparare un certo tipo di guasto, che il tecnico ricoverato riparava abitualmente. Siccome la degenza si prolunga, viene inviata una piccola delegazione di colleghi per imparare da lui come riparare tale guasto. Questi accoglie con piacere i colleghi e spiega loro come meglio può i dettagli della riparazione; i colleghi ritornano soddisfatti; ma una volta giunti in officina, non riescono ancora a riparare questo tipo di guasti. Quando poi il tecnico esce dall'ospedale, qualche settimana dopo, ricomincia a riparare senza problemi i guasti di sua competenza.

Che cosa apprendere infine?

I tre esempi appena citati illustrano ciò che chiamo «*la forma operativa della conoscenza*», quella che permette di fare e di riuscire, e che si riassume oggi nel termine di «*competenza*». Essa concerne sia il lavoro dell'operaio, sia quello dell'allievo, sia quello del ricezionista. Concerne ben inteso il lavoro dell'insegnante. Sono messi in gioco anche tutti i registri dell'attività: i gesti e la raccolta di informazioni percettive, il linguaggio e il dialogo, il ragionamento scientifico e tecnico.

Cerchiamo di andare più lontano.

La prestazione è evidentemente un primo stadio: X è più competente al tempo t che al tempo t' se sa fare ciò che prima non sapeva fare. Ma questa definizione non dice niente su tre altre considerazioni complementari alla prima, ugualmente decisive per l'analisi:

X è più competente se si impegna in modo migliore (più rapido, più affidabile, meglio compatibile col modo di impegnarsi dei suoi partners, gli allievi per esempio).

X è più competente se dispone di risorse alternative per trattare situazioni di un certo tipo, ma suscettibili, per le loro caratteristiche, di rendere un metodo più opportuno in un caso, meno in un altro.

X è più competente se è meno scoperto davanti a una situazione nuova.

Queste tre ultime considerazioni conducono all'analisi dell'attività, non solo a quella del suo risultato. La prestazione è radicalmente insufficiente per capire e definire la competenza.

Esaminiamo l'attività del riparatore di pompe idrauliche: sicuramente l'elemento base è che lui sa riparare guasti che gli altri non sanno riparare. Ma si osserva anche che egli esegue gesti sottili la cui funzione non è immediatamente interpretabile. Inoltre i gesti non sono tutta la sua competenza: rileva indici percettivi su parecchie parti della pompa idraulica, compie prove di funzionamento parziale, analizza il contributo sincronico e diacronico dei diversi movimenti in gioco. Per effettuare tutto ciò deve poter disporre di concetti-in-atto, che gli permettano di cercare l'informazione utile e ignorare altri aspetti del meccanismo e del suo funzionamento. Interroga anche la pompa idraulica guasta e ragiona in situazione, senza essere in grado di formulare completamente ciò che considera vero o ragionevole, e comunque senza possedere i termini per indicare senza ambiguità gli indizi che utilizza. Si può dire che «*la forma predicativa*» della sua conoscenza delle pompe idrauliche è al di qua della sua forma operativa. È la ragione del suo fallimento nel tentativo di comunicare il suo saper-fare dal suo letto di ospedale.

Esaminiamo ora l'attività del ricezionista: si trova in una situazione nella quale un altro interlocutore contribuisce a dare forma alla conversazione (situazione detta «dinamica»). Il cliente interlocutore è in parte prevedibile e in parte no. Il ricezionista deve dunque disporre di categorie che gli permettano di interpretare ciò che dice il cliente in relazione ai tre scopi distinti in precedenza (identificare il guasto, rassicurare, infondere fiducia), e contemporaneamente essere in grado di adattarsi all'imprevisto. In quanto adattativa, l'attività professionale è sempre opportunista. Ma anche questa comporta forti regolarità e le necessarie concettualizzazioni. In fondo all'azione si trova sempre la concettualizzazione, cioè l'identificazione di oggetti di livelli diversi, direttamente accessibili alla percezione o no, così come le loro proprietà e relazioni.

Esperienza, formazione iniziale e formazione continua

La breve analisi precedente conduce a una prima tesi forte: l'esperienza è inevitabile. Non si può sperare di procurare con la sola formazione una competenza altrettanto ricca e adattativa di quella formata durante l'esperienza.

Ma questa prima tesi dev'essere accompagnata da numerose altre:

1. Una buona formazione iniziale permette di trarre dall'esperienza più insegnamenti di una formazione di debole livello. Analogamente la formazione continua permette di interpretare diversamente l'esperienza professionale, di farne un'altra lettura, di darle un altro statuto di quello della sola esperienza.
2. Imparare «*in bottega*», come si diceva una volta, è un processo lento e poco economico. La formazione iniziale e quella continua danno questo di essenziale: permettono di mettere ordine nelle idee provenienti dalla pratica, formulandole e formalizzandole, riassumendo così in forma lapidaria le conoscenze costruite nell'azione. La forma predicativa del discorso del formatore viene così in soccorso della forma operativa costruita in situazione da chi apprende, rinforzando i punti più decisivi.
3. La formazione non consiste solamente di parole e testo. Il confronto con delle situazioni è indispensabile. Sorge allora la questione della trasposizione didattica.

Trasposizione didattica e mediazione

La didattica è un ambito relativamente recente, che consiste nello studio dei processi di trasmissione e di appropriazione delle conoscenze – processi che hanno un contenuto specifico – con lo scopo di migliorarli. La didattica professionale degli insegnanti, come quella delle discipline scolastiche, sono votate a far emergere, in situazioni adatte, le conoscenze che ci si augura vengano apprese. Se si mira, giustamente, alla forma operativa della conoscenza, non c'è scelta più ragionevole di mettere gli allievi in situationi che propongano il più possibile le proprietà che si vogliono vedere padroneggiate; e di analizzare la loro attività in situazione.

Dal gesto al ragionamento

Il gesto è un prototipo fondamentale dell'attività umana. È dunque da questo che è più naturale iniziare. L'attività gestuale contiene molte operazioni di pensiero, particolarmente in termini di rappresentazione di oggetti materiali, di loro proprietà, relazioni e trasformazioni, così come delle relazioni fra proprietà di gesti e proprietà di oggetti. È su queste rappresentazioni che si appoggiano l'organizzazione temporale e spaziale del gesto e le molteplici decisioni che guidano il decorso temporale.

Certo, esistono grandi differenze fra i gesti del neonato che impara ad afferrare i piccoli oggetti del suo ambiente per servirsene come strumenti, ed esplorarne le proprietà, e i gesti dell'artigiano ebanista o del saldatore di tubi; analogamente esiste una grande distanza fra il gesto del bebè di otto mesi che si mette ritto nel parchetto, e quello di un campione di salto con l'asta, o di una prima ballerina che eseguono alla perfezione un determinato movimento. Eppure, in tutti questi casi, l'organizzazione del gesto ha le stesse componenti, relativamente semplici da enunciare:

– un obiettivo, che si declina eventualmente in sotto-obiettivi, organizzati simultaneamente in modo sequenziale e gerarchico;
– l'ordinamento, la regolazione e l'aggiustamento delle diverse parti del gesto in funzione delle condizioni nelle quali si trova il soggetto ad ogni istante. Questa regolazione concerne sia l'ordinamento temporale sia la coordinazione dei movimenti delle diverse parti del corpo;
– l'identificazione degli oggetti materiali e delle loro proprietà: volume, peso, caratteristiche geometriche, distanza, resistenza alla forza, temperatura e altre proprietà fisiche. Questa rappresentazione degli oggetti intrattiene necessariamente relazioni con le proprietà del gesto perché un gesto mira ad essere adattato, e perché le sue caratteristiche principali devono dunque corrispondere ragionevolmente bene alle caratteristiche degli oggetti.
– il calcolo quasi-ininterrotto delle azioni da effettuare, delle informazioni da prelevare, dei controlli da effettuare. A dispetto dell'automatizzazione di certe parti dei gesti, esistono sempre numerose incertezze, che esigono complementi di informazione e inferenze in situazione. Anche quando la situazione è familiare, e appartiene a una classe ben caratterizzata, sono necessari aggiustamenti. Se la classe di situazioni evocata è meno strettamente definita, le inferenze hanno un ruolo ancora più importante, e con-

tribuiscono per esempio alla scelta di un'alternativa fra le molte, in funzione dei suoi vantaggi e inconvenienti.

Sono queste componenti dell'attività, di grande semplicità in fondo, che conducono alla definizione dello schema. Ma prima di presentare questa definizione, occorre verificare il valore descrittivo di ciò che è detto per attività diverse dal gesto, o più precisamente per attività nelle quali la riuscita o l'insuccesso non sono determinati dalla precisione e dall'abilità del gesto, ma da altre caratteristiche.

Prendiamo un altro registro di attività, quello della parola, del discorso, del dialogo; e consideriamo per esempio l'organizzazione dell'attività di un insegnante nella sua classe. Le componenti enunciate sopra sono di nuovo presenti:

– L'obiettivo: far condividere un certo numero di giudizi di fatto o di valori; formulare domande e passare perciò da certi sotto-obiettivi concernenti tale o tal altro punto, tale o tal altra analisi, tale o tal altra argomentazione. Eventualmente cercare di toccare gruppi differenti dell'uditorio.
– La regolazione e l'aggiustamento degli argomenti, della retorica, del tono col quale le cose sono dette. Questo adattamento riposa sia su una valutazione dell'insegnante delle attese e delle reazioni possibili degli allievi, sulle sue ipotesi, sull'interpretazione delle espressioni dei loro visi.

L'attività è sia ripetizione sia variazione. Non si può capire il pensiero presente nell'attività umana se non ci si vede il doppio carattere sistematico e opportunista. Non si ripete senza un sistema e delle regole, non ci si adatta alla contingenza, alla varietà e alla novità, senza categorie di pensiero per prendere e trattare l'informazione pertinente.

Il concetto di schema

Ne consegue la definizione dello schema:

Definizione 1: lo schema è un'organizzazione invariante dell'attività per una data classe di situazioni.

Definizione 2: lo schema è composto necessariamente di quattro componenti:

– un obiettivo, alcuni sotto-obiettivi e anticipazioni
– alcune regole di azione, di presa di informazione e di controllo
– alcuni invarianti operativi: concetti-in-atto e teoremi-in-atto
– alcune possibilità di inferenza in situazione.

La prima definizione comporta tre idee essenziali, che non è superfluo sottolineare.

– Lo schema si riferisce a una classe di situazioni. Vi si possono associare quantificatori universali, che permettono di definirne la portata e i limiti. È un ente universale, come il concetto.
– È l'organizzazione che è invariante, non il comportamento osservabile; gli schemi non sono stereotipi. Se certi schemi generano condotte relativamente stereotipate, ciò non vale per la maggior parte degli schemi: generano condotte diverse in funzione delle variabili di situazione.
– Lo schema non organizza solo il comportamento osservabile, ma anche l'attività di pensiero soggiacente.

La seconda definizione è analitica:

– Le regole costituiscono la parte generativa dello schema, che è il più immediatamente responsabile del decorso temporale del comportamento e dell'attività. Il comportamento non è solo formato dalle azioni, ma anche dalle raccolte dell'informazione necessaria alla continuazione dell'attività e dei controlli che permettono al soggetto di assicurarsi che ciò che ha pensato è ben fatto e che si trova sempre sulla via scelta. Queste regole sono totalmente condizionate dalla rappresentazione dell'obiettivo da raggiungere e dalle concettualizzazioni, esplicite o implicite, che permettono di identificare gli oggetti in presenza, le loro proprietà e relazioni, così come le loro trasformazioni.
– La parte intenzionale dello schema, che è l'obiettivo, è essenzialmente nell'organizzazione dell'attività. Si declina in sotto-obiettivi, sequenzialmente e gerarchicamente disposti; questi danno luogo a numerose anticipazioni. Anche quando l'obiettivo è solo parzialmente cosciente e quando gli effetti attesi dell'azione non sono tutti prevedibili dal soggetto, è la sorgente di aspetti differenziali importanti del comportamento, nell'educazione e nel lavoro in particolare: la forza dell'intenzione è variabile; e più intenzioni distinte possono coesistere nella stessa attività, le une dirette verso un obiettivo materiale, le altre verso altri.
– Più decisivi ancora dal punto di vista cognitivo sono gli invarianti operativi, perché i concetti-in-atto permettono di prelevare nell'ambiente le informazioni pertinenti, e di selezionare i teoremi-in-atto (proposizioni considerate vere) necessari al calcolo sia degli obiettivi sia dei sotto-obiettivi suscettibili di essere formati, sia delle regole d'azione, di raccolta di informazioni e di controllo che permettono di raggiungere i primi.
  Per capire bene quest'ultimo punto, occorre distinguere tra pertinenza e verità:
  Un concetto-in-atto è un concetto considerato pertinente nell'azione in situazione.
  Un teorema-in-atto è una proposizione considerata vera nell'azione in situazione.
  Nell'esempio presentato all'inizio di questa conferenza, il rapporto scalare tra 248'500 kg di grano e 120 kg di grano è un concetto-in-atto; ma è calcolato perché può essere utilizzato dopo per il calcolo della quantità di farina corrispondente alla produzione totale di grano, grazie al teorema-in-atto di isomorfismo moltiplicativo delle funzioni lineari:
  $f(\text{rapporto} \times 120) = \text{rapporto} \times f(120)$
  La relazione tra concetto-in-atto e teorema-in-atto è dialettica: i due sono allo stesso tempo distinti e inseparabili.
  I concetti-in-atto permettono di identificare sia oggetti sia predicati direttamente percettibili dal soggetto, e oggetti e predicati costruiti dalla cultura, dalla scienza, dalla tecnica, e anche dal soggetto stesso. Inoltre i predicati (a uno o più posti) possono diventare oggetti e intrattenere a loro volta relazioni con altri oggetti: il rapporto scalare è dapprima una relazione tra due grandezze della stessa natura; poi diventa un oggetto matematico.

Fra i teoremi-in-atto, certi hanno uno statuto di proposizione ritenuta vera qui e ora, nella situazione presente; mentre altri sono universalmente veri, per tutta una classe di situazioni. Lo statuto di una proposizione può variare tra il particolare e l'universale: per esempio 4+5=9 è una proposizione particolare se la si distingue da 4+6=9 o da 7+3=10, ma è una proposizione universale se si considera che è vera quando si contano sia i cavalli di una scuderia sia le penne depositate sul tavolo. Per contro 4+x=9 non è una proposizione, a meno che si determi il valore della x; è una funzione proposizionale, né vera, né falsa finché x non sia conosciuto.
L'analisi precedente può apparire complessa a un lettore non competente. In realtà è abbastanza semplice. In una data situazione, il soggetto dispone di diversi tipi di conoscenze, per identificare gli oggetti e le loro relazioni e per darsi, a partire di lì, obiettivi e regole di condotta pertinenti. Le conoscenze sono conoscenze-in-atto; sono designate qui con il termine di «invarianti operatori» per significare che queste conoscenze non sono necessariamente esplicite, né esplicitabili e, per alcune di esse, nemmeno coscienti. Il concetto di invariante operatorio permette di parlare usando gli stessi termini sia dell'identificazione in situazione di oggetti materiali e delle loro relazioni percettive, sia dell'interpretazione delle informazioni in situazioni nelle quali c'è posto per l'incertezza e per l'ipotesi, sia ancora per i ragionamenti che portano su oggetti altamente elaborati della cultura.

– Le possibilità di inferenza. Perché è necessario menzionarle nelle componenti dello schema? Giustamente perché lo schema non è uno stereotipo e non corrisponde per nulla alla metafora pericolosa secondo la quale nell'attività del cervello esisterebbero forme «cablate». Il funzionamento di uno schema richiama sempre un'attività intensa di calcolo in situazione, come ne testimoniano d'altronde abbondantemente gli studi sul funzionamento del cervello. Le possibilità di inferenza sono principalmente teoremi-in-atto specifici del dominio e della classe delle situazioni alla quale si riferisce lo schema, ma anche dei teoremi-in-atto più generali, che coprono diversi campi di attività, e che sono spesso formalizzati con termini logici come la deduzione, l'induzione, l'adduzione. Non bisogna però sbagliarsi; anche questi teoremi logici hanno una portata locale: per esempio la transitività delle relazioni d'ordine può essere spontaneamente utilizzata da un bambino di 8 anni in certe attività ma non in altre. Non si sfugge mai totalmente dal bisogno di specificare il campo di attività al quale ci si interessa e dunque quello della concettualizzazione specifica che occorre analizzare per capire il funzionamento e lo sviluppo cognitivo.

Campo di esperienza, campo concettuale e zona di sviluppo prossimale

Definizione: un campo concettuale è allo stesso tempo un insieme di situazioni e un insieme di concetti. L'insieme delle situazioni la cui padronanza progressiva richiede una varietà di concetti, di schemi e di rappresentazioni simboliche in stretta connessione. L'insieme dei concetti che contribuiscono alla padronanza di queste situazioni.

Prenderò l'esempio delle strutture additive.

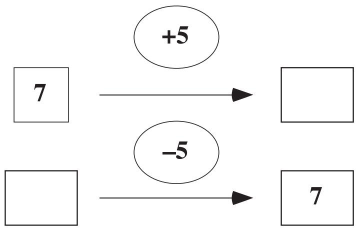
Consideriamo i tre problemi seguenti, tutti risolvibili con la stessa operazione numerica: 7+5 oppure 5+7:

Pierre aveva 7 biglie. Ne guadagna 5. Quante ne ha ora?

Robert ha perso 5 biglie; ora ne ha 7. Quante ne aveva prima di giocare?

Thierry ha giocato due partite alle biglie. Non si ricorda più di ciò che è successo nella prima partita. Alla seconda partita ha perso 7 biglie. Facendo i conti, si accorge che, in tutto, ha guadagnato 5 biglie. Che cosa succede alla prima partita?

I due schemi seguenti aiutano a capire bene la differenza tra i due primi problemi, di Pierre e Robert.



Il problema «Pierre» corrisponde a uno dei due casi prototipi dell'addizione. Si conosce lo stato iniziale e la trasformazione, e si cerca lo stato finale (l'altro caso prototipo è la riunione di due parti in un tutto).

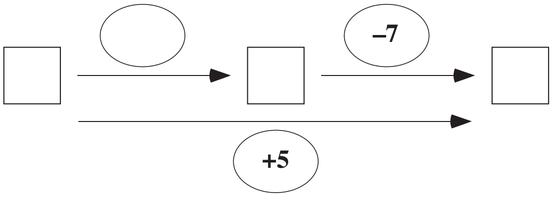
Il problema «Robert» non è un prototipo: non si conosce lo stato iniziale e, per trovarlo, occorre applicare allo stato finale la trasformazione inversa di quella diretta.

Il primo problema «Pierre» è risolto dalla quasi totalità dei bambini alla fine del primo anno di scuola elementare, mentre il secondo «Robert» viene risolto non prima di un anno e mezzo più tardi, in media. Il ragionamento canonico proviene allora da un teorema-in-atto che non era necessario per il problema «Pierre».

se $F = T(I)$ allora $I = T^{-1}(F)$

La distinzione tra concetto-in-atto e teorema-in-atto è molto importante perché i concetti sono gli stessi nel problema «Pierre» e nel problema «Robert»: stato e trasformazione, stato iniziale e stato finale. È un teorema-in-atto che fa la differenza. La riuscita diversa fra il problema «Pierre» e il problema «Robert» rappresenta una piccola rottura.

Con il problema Thierry, si ha a che fare con una grande rottura, perché non è risolto se non da una piccolissima minoranza di allievi alla fine della scuola primaria e all'inizio della scuola secondaria. La scelta dell'addizione è contro-intuitiva per la quasi-totalità degli allievi, e persino anche per molti adulti.



Qui si ha a che fare con la composizione di due trasformazioni, e bisogna scomporre +5 in due trasformazioni di segno contrario, l'incognita e –7.

I soggetti interrogati invocano allora la difficoltà dell'enunciato e anche il fatto che non si conosce lo stato iniziale. Mostrerò invece che lo stesso enunciato è capito abbastanza facilmente quando i valori numerici utilizzati permettono di evitare il problema della scomposizione di una trasformazione in due trasformazioni di segno contrario.

Prendiamo i quattro casi seguenti:

A. Vinto 7 vinto 15

*Thierry ha giocato due partite alle biglie. Non si ricorda più di quello che è successo nella prima partita. Nella seconda partita ha **vinto 7 biglie**. Facendo i conti, si accorge che, in tutto, ha **vinto 15 biglie**. Che cos'è successo nella prima partita?*

B. Perso 7 perso 15

*Thierry ha giocato due partite alle biglie. Non si ricorda più di quello che è successo nella prima partita. Nella seconda partita ha **perso 7 biglie**. Facendo i conti, si accorge che, in tutto, ha **perso 15 biglie**. Che cos'è successo nella prima partita?*

C. Vinto 15 vinto 7

*Thierry ha giocato due partite alle biglie. Non si ricorda più di quello che è successo nella prima partita. Nella seconda partita ha **vinto 15 biglie**. Facendo i conti, si accorge che, in tutto, ha **vinto 7 biglie**. Che cos'è successo nella prima partita?*

D. Perso 7 vinto 15

*Thierry ha giocato due partite alle biglie. Non si ricorda più di quello che è successo nella prima partita. Nella seconda partita ha **perso 7 biglie**. Facendo i conti, si accorge che, in tutto, ha **vinto 15 biglie**. Che cos'è successo nella prima partita?*

Alla fine della scuola elementare, i due problemi A e B sono risolti senza grande difficoltà: per slittamento di senso, gli allievi li interpretano come problemi parte/parte/tutto: il tutto e la parte sono di stesso segno, il tutto è più grande della parte. Gli allievi si rifanno così a un caso più elementare.

Il problema C) è un po' più delicato, perché il tutto è più piccolo della parte. Ma gli allievi operano un altro slittamento di senso, cioè «vinto 15 biglie» è considerato come uno stato iniziale e «vinto 7 biglie» come uno stato finale. Non è troppo difficile, allora, cercare la trasformazione negativa che fa passare dallo stato iniziale a quello finale, per differenza tra 15 e 7.

Per contro, il problema D non permette di slittare di senso. Occorrono dunque concettualizzazioni supplementari: sia una relazione nell'insieme dei numeri relativi, sia un ragionamento su ipotesi, implicito o esplicito, che permetta di rappresentarsi che ha dovuto vincere, nella prima partita, sia le biglie vinte in tutto sia quelle perse nella seconda partita.

Così la scelta dei valori numerici trasforma un problema relativamente semplice in un problema difficile.

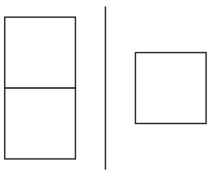
È ragionando su un grande numero di casi che è possibile appropriarsi del campo concettuale delle strutture additive. Lo presento come un insieme di sei relazioni di base, che possono se declinarsi in un gran numero di problemi-tipo, che richiedono invarianti operatori diversi, sui quali non ho il tempo di dilungarmi qui. A queste relazioni corrisponde un insieme di concetti, dei quali molti sono ignorati dagli insegnanti, persino dai matematici. Il peso del numerico è tale, in matematica, che non si prende la misura dei calcoli relazionali necessari per scegliere le operazioni numeriche e i dati pertinenti, tanto più che questi calcoli restano più spesso totalmente impliciti. Pertanto sarebbe un errore ridurre l'apprendimento dell'aritmetica alle quattro operazioni e al concetto di numero.

La tavola seguente riassume le relazioni che, per combinazione, permettono di generare la totalità dei problemi di addizione e di sottrazione.

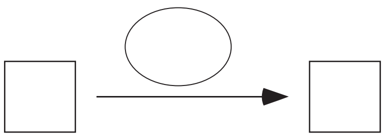
Nell'insieme delle classi di problemi, si possono identificare le figliazioni «felici», quelle che permettono agli allievi di appoggiarsi sulle loro conoscene anteriori e di progredire un po' nella complessità (si è allora nella zona di sviluppo prossimale più accessibile), e quelle che sono «rotture», e che portano alla destabilizzazione degli allievi: ci si trova allora in una zona di sviluppo prossimale meno accessibile, per la quale il lavoro di mediazione dell'insegnante è più importante e più complesso.

Sei relazioni additive

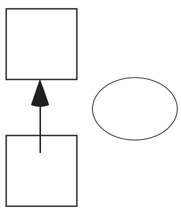
parte / parte / tutto



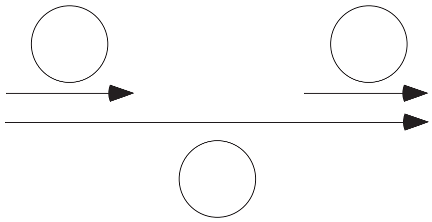
stato / trasformazione / stato



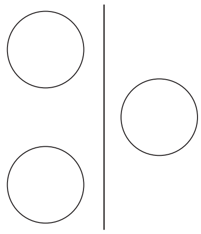
confronto



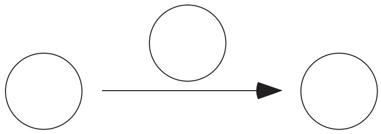
composizione di trasformazioni



composizione di relazioni



trasformazione di una relazione



Quali concetti sono organizzatori delle strutture additive?

Quantità discrete e continue, misura;
parte - tutto;
stato - trasformazione;
confronto referito - referente;
composizione binaria (di misure, di trasformazioni, di relazioni);
operazione unaria e funzione;
inversione;
numero naturale - numero relativo;
posizione - ascissa - valore algebrico.

Si sa che, fino alla metà del XIX secolo, il numero negativo non è stato accettato come un vero numero da una parte dei matematici, ma solamente come un mezzo comodo di calcolo algebrico[2]. Le resistenze degli allievi nei confronti dei calcoli con numeri negativi e delle soluzioni negative delle equazioni non sono dunque sorprendenti: si spiegano principalmente con il fatto che il numero è dapprima una misura, che le misure sono positive e che non si introducono abbastanza presto i ragionamenti sulle relazioni e sulle trasformazioni che, loro sì, possono essere effettivamente positive o negative.

Le relazioni di Chasles sono un altro esempio di relazioni additive, che permettono di mostrare il contrasto tra un caso di figura relativamente intuitiva e un caso contro-intuitivo.

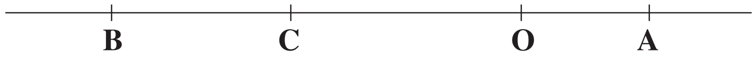
2. Vedere in particolare l'articolo di Schubring a pagina 49 di questi Atti.

Relazioni di Chasles

$\overrightarrow{AB} = \text{abs}(B) - \text{abs}(A)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Esempio banale

Esempio contro-intuitivo



Che cos'è la rappresentazione?

Il concetto di rappresentazione è un concetto debole; inoltre, la rappresentazione di un soggetto non è direttamente accessibile all'osservatore esterno; e nello stesso tempo è piena di fenomeni di illusione ottica per il soggetto stesso. Se, contrariamente al *behaviourismo* e alle sue sequele, si considera la rappresentazione come un oggetto di studio essenziale per lo psicologo, occorre tentare di fare un po' di chiarezza. Esistono diversi sensi del termine «rappresentazione».

Un primo senso è quello di flusso della coscienza del quale ogni individuo è testimone col suo pensiero: immagini visive, sonore, olfattive, posturali e cinestetiche sono gli elementi permanenti della percezione e dell'azione; sono pure gli elementi dell'immaginazione, e non solo del sogno e della fantasticheria, ma anche dell'attività funzionale perché il soggetto in situazione è anche condotto a interpretare l'informazione bene al di là dell'osservabile del quale dispone. Questo flusso permanente di percezioni, di idee, di immagini, di gesti e di parole interiori è una caratteristica così essenziale del pensiero, che conduce a considerare la percezione come parte integrante della rappresentazione. Occorre andare ancor più lontano e considerare che l'azione interiorizzata è anche parte integrante della rappresentazione.

Un secondo senso del termine «rappresentazione» è quello delle categorie di pensiero con le quali un individuo cattura e integra le informazioni presenti in una situazione. La rappresentazione è allora costituita da sistemi di oggetti e di predicati possibilmente pertinenti, ai quali il soggetto è condotto a far capo nel corso della sua attività. È questo senso che permette di considerare gli invarianti operativi appena accennati, come costituenti essenziali della rappresentazione. Parlare di sistemi di oggetti e di predicati come abbiamo appena fatto permette di considerare oggetti e predicati di diversi livelli concettuali. Per esempio, esistono categorie di pensiero che concernono l'intenzionalità, i rapporti fra le proprietà delle azioni e le proprietà degli oggetti, le interpretazioni causali, ecc. L'idea di sistema ci condurrà più avanti al concetto di «campo concettuale».

Un terzo senso del termine «rappresentazione» è quello che concerne i rapporti significante/significato nel linguaggio naturale e negli altri sistemi simbolici sviluppati dalle società umane nel corso della storia, per rappresentare le conoscenze ritenute vere, comunicare a loro proposito e sostenere i processi del pensiero. Questi simboli possono essere uditi o visti da tutti gli individui, ma la loro interpretazione dipende, ancora più fortemente rispetto alla percezione, dai fenomeni materiali, dai sistemi di invarianti operativi con i quali sono uditi o visti da un individuo: ci sono più diversità fra individui nella lettura della notazione musicale che nell'ascolto della musica stessa. La notazione musicale è interamente culturale; deve essere insegnata e appresa.

Per un quarto senso, devo richiamare l'idea avanzata dall'inizio di questo scritto, che la rappresentazione è attività e non soltanto repertorio di concetti e di forme simboliche. Gli schemi fanno dunque parte della rappresentazione, come le situazioni lo sono dell'attività del soggetto e della sua organizzazione, un riferimento alla realtà almeno forte come gli oggetti e le loro proprietà. In altri termini la prima relazione del soggetto con la realtà è la relazione situazioni-schemi, le prime essendo dalla parte della realtà (anche se sono proprio gli schemi che permettono al soggetto di identificarli), i secondi dalla parte del soggetto (anche se gli schemi traggono una parte della loro identità dalle situazioni alle quali si rapportano).

Bibliografia e letture complementari

Brun J., Conne F., Floris R., Lemoyne G., Leutenegger F., Portugais J. (1994). Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes. In M. Artigue et al: *20 ans de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

D'Amore B. (2001). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Mayen P. (1998). Le processus d'adaptation pragmatique dans la coordination d'une relation de service, Kostulski K., Trognon A. (dir.). *Distribution des savoirs et coordination de l'action dans les équipes de travail*. Nancy: P.U.Nancy.

Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna: Pitagora.

Vergnaud G. (1994). *Il Bambino la Matematica la Realta*. Roma: Armando Editore.

Vergnaud G., Bregeon J. L., Dossat L., Huguet F., Myx A., Peault H. (1997). *Le Moniteur de Mathématiques. Cycle 3*. Paris: Nathan.

Vergnaud G. (2000). *Lev Vygotski pédagogue et penseur de notre temps*. Paris: Hachette Education.

Vergnaud G. (2007). La concettualizzazione nell'attività degli allievi e nella pratica degli insegnanti. In B. D'Amore et al. *Allievi, insegnanti, sapere: la sfida della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Vergnaud G. (2008). Le malizie della sottrazione. *La vita scolastica*, 14, p. 16-17.

Presentazione dei conferenzieri

Giorgio Bolondi
(Università degli Studi di Bologna, Italia)
Ha ottenuto la laurea in matematica all'Università di Bologna e il dottorato all'Università di Nizza, Francia. Dopo aver condotto per diversi anni ricerca in geometria algebrica, si è dedicato a partire dagli anni novanta allo studio dei problemi legati alla trasmissione del sapere matematico, storia e didattica.

Vicenç Font Moli
(Università di Barcellona, Spagna)
Docente all'Università di Barcellona e nella scuola secondaria. Ha pubblicato vari libri di testo per tutti i livelli scolastici e per la formazione degli insegnanti, nonché vari articoli sul tema della educazione matematica. Le sue linee di lavoro sono l'epistemologia della didattica della matematica, la didattica del calcolo differenziale e integrale e l'approccio ontosemiotico della cognizione e istruzione matematica (EDS).

Juan Diaz Godino
(Università di Granada, Spagna)
È professore ordinario di didattica della matematica presso I' Università di Granada. Insegna matematica e didattica della matematica nei corsi per la formazione degli insegnanti di scuola primaria e teoria dell'educazione matematica nella facoltà di Scienze della formazione. Dal 1994 sta sviluppando la cornice teorica di un «approccio ontosemiotico della conoscenza matematica».

Claire Margolinas
(Università Blaise Pascal di Clermont Ferrand, Francia)
Ha ottenuto un dottorato in didattica della matematica presso l'Università Joseph Fourier di Grenoble e un'abilitazione a dirigere le ricerche in scienze dell'educazione presso l'Università di Aix Marseille. È attiva nella formazione in matematica e didattica della matematica degli insegnanti a tutti i livelli presso l'Istituto di formazione dei maestri di Clermont Ferrand. Nota per gli studi sulla modellizzazione della situazione dell'insegnante, si dedica inoltre alla concezione di trattati multimedia di matematica destinati agli insegnanti della scuola elementare.

Gert Schubring
(Università di Bielefeld, Germania)
Laureato in matematica e fisica presso l'Università di Bonn, ha ottenuto il dottorato con una tesi sui principi della genetica e successivamente l'abilitazione in storia della matematica presso l'Università di Bielefeld. I suoi principali temi di ricerca riguardano la storia della matematica e della scienza e del loro insegnamento nel contesto culturale del 18° e del 19° secolo, sui quali ha

pubblicato numerosi libri. È direttore responsabile della nuova rivista International *Journal for the History of Mathematics Education*, pubblicata dal 2006.

Gérard Vergnaud
(Università di Parigi 8, Francia)
Psicologo di formazione, ha sostenuto la sua tesi con J. Piaget nel 1968 a Ginevra, dalla cui Università ha pure ricevuto il titolo di Dottore honoris causa. È stato per un lungo periodo coordinatore della rete di ricerca francese in didattica della matematica e della fisica e presidente del gruppo internazionale *Psychology of Mathematics education*. Le sue ricerche si sono orientate principalmente sullo sviluppo delle competenze matematiche degli allievi di scuola elementare e media. Ha pure contribuito allo sviluppo della didattica della formazione professionale.

Presentazione della mostra didattica

Il convegno è accompagnato da una mostra didattica dedicata agli insegnanti, agli allievi e ai genitori delle nostre scuole. Costituisce una rassegna di attività matematiche svolte in classe, un'occasione privilegiata per proficui scambi di esperienze vissute, uno stimolo a produrre nuovi materiali e percorsi didattici, strumenti essenziali per promuovere un buon apprendimento. Un apprendimento, cioè. Che non sia troppo soggiogato al tecnicismo e al formalismo matematico, ma che si apra all'ampio ventaglio culrturale, scientifico e umanistico.

Matematica e dintorni: laboratori interdisciplinari per scuola dell'infanzia, elementare e secondaria di primo grado
Forlìmatica, coordinata da A. Carloni, L. Colinelli, L. Giorgi, S. Neri, R. Ricci, A Siboni, T. Tampellini, S. Tartagni (Forlì, Italia)

Riflessi matematici in natura
Renzo Didoni (ICS di Vedano al Lambro, Italia)

Matematica e Arte
G. Baldi, A. Ferrini, A. Leonardi, S. Traquandi (SS 1° grado Marconi 55; 2° grado Giovanni da San Giovanni, S. Giovanni Valdarno, AR, Italia)

Matematica: che storia!
L. Crivelli, L. Falconi, F. Gazzoli, S. Kunz, A. Lunghi, N. Olivieri, M. Stefanini, D. Tamagni (studenti ASP Locarno, formazione di base)

Percorso matematico attraverso i cinque sensi
A. Carmeci, F. Franzi, I. Fregosi, S. Scaramozza, L. Zanchin (studentesse ASP, scuola elementare)

Giochiamo con la matematica e non solo...
M. Akai, V. Battista, L. Beltotti, E. Cattaneo, A. Cereda, F. Riva, M. Soldati (studentesse ASP, formazione di base: infanzia e elementare)

Settimana di gioco e matematica
S. Cataldi, D. Caglioni, S. Morinini (insegnanti scuola media, Minusio)

Matematica dappertutto
J. Hernandez, F. Mazzaro (insegnanti scuola media, Gravesano e Lodrino)

Progetto grafico:
Bruno Monguzzi
Stampa:
Lineagrafica