Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di divisione[1]

Gianfranco Arrigo e Silvia Sbaragli
N.R.D., Bologna
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

con la collaborazione di:
Rosanna Beccaro, Vanda Bussi, Maurizio Candeago, Alberta Ferretti, Luisa Ghisio, Giovanna Giubelli (Istituto Comprensivo di Pray, Biella)

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Arrigo G., Sbaragli S. (2008). Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria relative al concetto di divisione. *La matematica e la sua didattica*. 4, 479-520.

Summary. *This research is based on an investigation carried out on 73 primary school teachers (41 from Ticino, Switzerland, and 32 from Piemonte, Italy) to evaluate their convictions regarding division and the sets on which such operation can be defined. From the results it comes out in many cases the lack of an aware knowledge of this topic along with misconceptions and incorrect and inconsistent intuitive models that influence the didactic transposition. The origins of difficulties in the learning of division on the part of students could therefore depend not only on epistemological obstacle but also on didactic ones.*

Resumen. *Esta investigación se basa en los resultados de un sondeo hecho a 73 docentes de la escuela primaria (41 de la Suiza Italiana y 32 italianos) que indagaba sobre sus convicciones acerca de la operación de división y sobre los conjuntos aritméticos en los cuales esta operación puede ser definida. De los resultados surge una evidente falta de saber conciente sobre este argumento además de la presencia de misconcepciones y modelos intuitivos erróneos e incoherentes, aspectos que se manifiestan en la transposición didáctica. Los orígenes de la dificultad en el aprendizaje del concepto de división por parte de los alumnos podrían, por tanto, depender no sólo de obstáculos de tipo epistemológico sino también de obstáculos de tipo didáctico.*

---

[1] La presente ricerca è stata finanziata con fondi dell'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

Sunto. *Questa ricerca è basata su di un'indagine effettuata su 73 insegnanti di scuola primaria (41 ticinesi e 32 piemontesi) per valutare le loro convinzioni relative all'operazione di divisione e agli insiemi numerici nei quali può essere definita tale operazione. Dai risultati emergono in diversi casi una mancanza di sapere consapevole su questo argomento oltre alla presenza di misconcezioni e modelli intuitivi erronei e incoerenti, il che ricade sulla trasposizione didattica. Le origini delle difficoltà nell'apprendimento del concetto di divisione da parte degli allievi potrebbero quindi dipendere non solo da ostacoli di tipo epistemologico ma anche da ostacoli di tipo didattico.*

Resumo. *Esta pesquisa funda-se num estudo sobre 73 professores de escola primaria (41 do Cantão Tessino e 32 piemonteses) para avaliar as convicções deles no assunto da operação de divisão e dos conjuntos numéricos nos quais pode ser definida esta operação. Dos resultados ressaltam em alguns casos uma falta de conhecimento consciente neste assunto além da presencia de misconceições e modelos intuitivos errados e incoerentes, o que afeita a transposição didática. As origens das dificuldades na aprendizagem do conceito de divisão entre os alunos poderiam então depender não só de obstáculos epistemológicos mas também de obstáculos didáticos.*

Résumé. *Cette recherche est fondée sur une enquête effectuée sur 73 enseignants de l'école primaire (41 tessinois et 32 du Piémont) visant à évaluer leures convictions par rapport à l'opération de division et aux ensembles numériques dans lesquels cette opération peut être définie. Les résultats montrent que dans plusieurs cas il y a un manque de savoir conscient sur ce thème et une présence de misconceptions et de modèles intuitifs erronés et incoérents et tout ça retombe sur la transposition didactique. Les origines des difficultés que les élèves trouvent dans l'apprentissage du concept de division pourraient donc dépendre pas seulement des obstacles épistémologiques mais aussi de ceux de type didactique.*

Zusammenfassung. *Diese Forschung basiert sich auf einer Umfrage zur Bewertung der Überzeugungen über die Division und ihre verschiedene Definitionsbereiche, die 73 Lehrer der Primarschule (41 tessiner und 32 von der Piemont) betroffen hat. Die Ergebnisse zeigen, dass es in mehreren Fällen einen Mangel an Wissen zu diesem Thema sowie das Vorhandensein von falschen Ideen und inkohärenten intuitiven Modelle gibt, und das kann die didaktische Transposition beeinflussen. Die Ursprünge der Schwierigkeiten, die die Schüler beim Lernen des Konzepts der Division haben, könnten daher nicht nur von epistemologischen, sondern auch von didaktischen Hindernissen abhängen.*

1. Introduzione

Diverse ricerche attuali in didattica della matematica hanno messo in evidenza come alcune difficoltà incontrate dagli allievi possono essere dovute ad una inopportuna trasposizione didattica effettuata da alcuni insegnanti non del tutto padroni del sapere da trasporre (Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005; Sbaragli, 2006). La presente ricerca si inserisce in questo filone e ha come oggetto di studio le convinzioni degli insegnanti sul concetto di divisione; in particolare, si vuole valutare se esistono misconcezioni[2] possedute dagli insegnanti di scuola primaria su questo argomento che possono condizionare la qualità e persino la correttezza del loro insegnamento.

Nell'apprendimento della matematica si possono distinguere varie componenti che sono state evidenziate da Fandiño Pinilla (2005a) e che possono essere riferite anche alla divisione:

- concettuale (noetica);
- algoritmica (es. saper eseguire divisioni composte di atti elementari);
- strategica (es. risoluzione di problemi);
- comunicativa (es. argomentazione, validazione, dimostrazione, …);
- relativa alla gestione di diversi registri semiotici.

Come sostiene Fandiño Pinilla (2005a): «Che le difficoltà in questi apprendimenti siano specifiche è sotto gli occhi di tutti: ci sono infatti persone che hanno costruito concetti, ma non sanno eseguire algoritmi; persone che eseguono algoritmi, ma non sanno che concetti ci sono alla base di tali esecuzioni; persone che hanno costruito concetti e sanno eseguire algoritmi, ma non sanno risolvere problemi; persone che hanno costruito concetti, sanno eseguire algoritmi, sanno risolvere i problemi, ma non sanno comunicare quel che hanno personalmente costruito, …».

Per quanto riguarda l'algoritmo della divisione è idea comune che anche solo il suo "meccanismo"[3] può risultare di ostacolo all'apprendimento. Una testimonianza significativa di questa difficoltà, per esempio, è

[2] Diamo a questo termine l'interpretazione costruttiva presentata in D'Amore, Sbaragli (2005): «Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione».

[3] La parola "meccanismo" è tratta da Brousseau (1980).

rintracciabile nel XVII secolo in una pagina dei diari dell'inglese Samuel Pepys, politico, scrittore e uno dei più importanti funzionari statali di quel periodo. Pepys, che per la tenuta dei libri contabili si faceva aiutare dalla moglie, scrive: «Mia moglie è adesso in grado di effettuare senza fatica le addizioni e le sottrazioni e financo le moltiplicazioni. Ma io non oso turbarla ancora con la pratica delle divisioni».

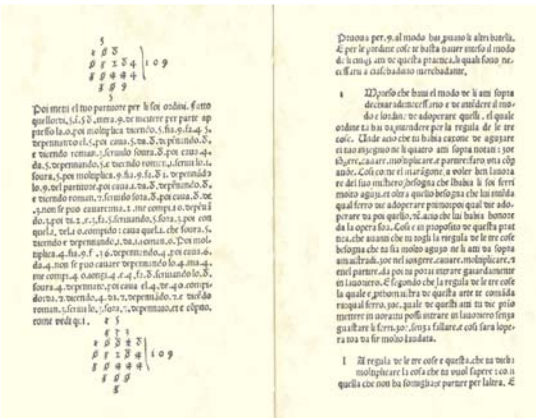
Samuel Pepys (1633 – 1703)

Ricordiamo, inoltre, l'ampia presentazione della divisione riportata ne *Larte de Labbacho* (Treviso, 1478) il primo libro di matematica stampato al mondo, noto come *l'Aritmetica di Treviso*, dove la divisione viene così introdotta: *«partire e de do numeri propositi : truovare uno terzo numero : el quale se trova tante volte nel mazore : quante unitade sono nel menore»*.[4] Dunque essa è introdotta come l'operazione inversa della moltiplicazione. Sempre a proposito della divisione, l'anonimo Autore nota: *«chel numero che de fir partito sempre de essere mazore : o vero al mancho eguale al partitore. E quando quelli sono eguali : sempre nasce .1. per parte»*.

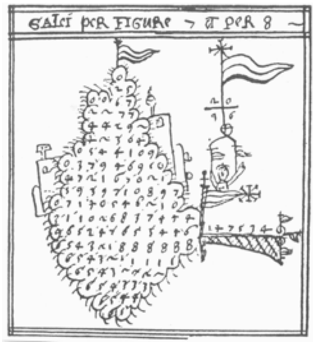
In questo libro sono inoltre riportati i procedimenti per l'esecuzione pratica della divisione, come la divisione "per battello" che si basa su di un procedimento apparentemente complicato, ma assai diffuso nel Medioevo, direttamente riferibile alla *"divisio aurea"* eseguita sulle

[4] Ne Larte de Labbacho non compaiono i segni con i quali, modernamente, sono indicate le quattro operazioni aritmetiche (+, -, ×, :). La divisione viene denominata con *"partire"*, ovvero dividere, ed è indicata con *"in"*. L'introduzione del simbolo moderno della divisione risale al 1657 grazie a G. Oughtred.

tavolette dell'abaco; soltanto nel XVII secolo essa sarà sostituita definitivamente dal metodo utilizzato ai giorni nostri, denominato inizialmente *"divisione per danda"*. Da questo punto di vista si veda l'interessante articolo di Bagni (1994).



Pagine originali di Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478) con la "divisione per battello"



La "divisione per battello" come appare nel Libro de Aritmeticha *di Dionigi Gori (1571)*

Un importante contributo, per quanto riguarda la divisione, è dato da Brousseau (1980) che sostiene come l'insegnamento degli algoritmi del calcolo sia separato da quello del senso, per cui allievi capaci di eseguire algoritmi hanno difficoltà a identificare situazioni nelle quali vanno applicati; riescono solo gli allievi più capaci in virtù di "misteriosi transfer": «Questo apprendimento [dei "meccanismi" e del "senso"] è concepito in due parti che si possono guardare separatamente:
- l'apprendimento dell'algoritmo che gli insegnanti chiamano "meccanismo" dell'operazione, e
- quello detto del "senso" di questo meccanismo, cioè la conoscenza delle occasioni di "applicarlo".

Il primo viene dalle tecniche dell'apprendimento classico e, al limite, dal condizionamento. L'altro non si può apprendere attraverso la ripetizione degli esempi e delle applicazioni nei problemi, se non grazie a misteriosi transfer che "l'allievo effettua se e solo se possiede un'intelligenza sufficiente"».

L'analogo avviene per le altre componenti dell'apprendimento della divisione: basta pensare all'aspetto strategico specifico delle situazioni problematiche.
In questa ricerca abbiamo scelto di occuparci dell'aspetto concettuale della divisione.
A tal proposito riteniamo utile fare una premessa alla quale ci riferiremo in seguito, in particolare nell'interpretazione dei risultati della nostra indagine.
Sappiamo che l'operazione divisione può essere definita soltanto in un gruppo moltiplicativo (G ; ×). In esso, ogni equazione del tipo $x \times b = a$ (x, a, b elementi di G) ha l'unica soluzione $x = a \times b^{-1}$, con b^{-1} elemento simmetrico di b. L'espressione $a \times b^{-1}$ può anche essere scritta nella forma a:b e dare origine così a una nuova operazione da G×G verso G, detta appunto divisione. Da questo punto di vista, nel caso dei classici insiemi numerici, la divisione non potrebbe essere definita né nell'insieme dei numeri naturali N, né nell'insieme dei numeri interi Z, non avendo la struttura di gruppo moltiplicativo. La prassi, però, fa sì che una sorta di operazione "divisione" sia considerata anche in N e in Z. Più precisamente, in questi insiemi si usa introdurre due tipi di "divisione":
- la prima è quella che permette di risolvere problemi di ripartizione equa o di contenenza. Essa è considerata nell'insieme N e in esso non è ovunque definita: ha senso solo per coppie del tipo (k×n ; n), con k naturale qualunque e n naturale diverso da 0; a questa coppia corrisponde il risultato k, detto anche quoto (o quoziente). Questa operazione è anche alla base dello studio della divisibilità: il numero $a = k \times n$ è detto multiplo di k (o di n), mentre i numeri k e n sono chiamati divisori di a, per questo il numero a è divisibile per k e per n;
- la seconda è detta "divisione con resto" ed è definibile sia in N che in Z. In essa, a ogni coppia di numeri (n,d), con $d \neq 0$, corrisponde una coppia di numeri (q,r), con $r < d$ tale che:
$n : d = q$ con resto r   di conseguenza $n = q \times d + r$.
Questa operazione in N è detta anche "divisione euclidea", essendo stata proposta da Euclide negli *Elementi* (VII, 1-2), con la restrizione $n > d$. La divisione euclidea, detta in àmbito scolastico "divisone con resto", è alla base dell'aritmetica modulare.[5]

[5] L'aritmetica modulare si basa sulla congruenza aritmetica modulo n, definita in Z:

2. Quadro teorico

I riferimenti concernenti questo delicato settore sono numerosi, ma in questa trattazione citeremo solo i lavori di ricerca che hanno influenzato il nostro studio.

Fondamentali risultano i classici studi di Guy Brousseau e Efraim Fischbein.

Brousseau (1987) tratta l'apprendimento del senso della divisione sostenendo che: «Lo studio di processi spontanei di creazione e di gestione del senso, sia che siano empirici (come l'ostentazione, la presentazione ripetuta, la variabilità contestuale o no), sia che separino l'apprendimento dell'algoritmo da quello del senso, o, al contrario, che li integrino come nei processi (azione, formulazione, prova, istituzionalizzazione), sia che pretendano di essere definitivi (a-genetici) o che prevedano delle riprese o una genesi, è indispensabile ma è appena agli inizi. È essenziale ottenere informazioni più precise sulle concezioni degli allievi che sono realmente diverse e sul modo in cui queste creano o no ostacoli alle riprese». Nell'articolo sono proposte su questo argomento sperimentazioni che hanno portato ad una categorizzazione di concezioni classiche sul senso della divisione a livello primario che si articola sui seguenti cinque aspetti: le partizioni, la ricerca del termine sconosciuto di un prodotto, la divisione "frazione", la funzione lineare, la composizione di funzioni lineari. Nelle conclusioni dell'articolo si legge tra l'altro che: «Le situazioni didattiche proposte nella pre-sperimentazione sembrano proprio influenzare e sviluppare il senso e la comprensione delle conoscenze sulla divisione. Ma la loro gestione esige da parte degli insegnanti strategie raffinate, che appaiono critiche, e che, in ogni caso, non sono facili da comunicare a insegnanti poco abituati a modificare il loro contratto didattico».

Fischbein (1985a,b; 1992a,b; 1998) presenta invece nei suoi lavori i diversi *modelli intuitivi* delle operazioni; tra questi considera anche il caso della divisione. Si riserva il nome di *modello intuitivo* a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che

---

due numeri interi a, b sono congruenti modulo n se e solo se a–b=k·n (k intero). Due numeri congruenti modulo n, divisi per n, danno lo stesso resto. La congruenza è una relazione di equivalenza. L'insieme Z può quindi essere suddiviso in classi di equivalenza dette "classi di resti modulo n". Gli oggetti dell'aritmetica modulare sono appunto le classi di resti. Fra i numerosi risultati dell'aritmetica modulare vi sono anche i vari criteri di divisibilità che vengono insegnati a scuola.

hanno dunque un'accettazione immediata forte.
Seguendo le parole di Fischbein (1985a): «Il livello intuitivo si riferisce alla *dinamica dell'accettazione soggettiva di un enunciato matematico come cosa evidente e certa*».[6]
Di conseguenza: «Il termine "intuitivo" può avere, nei confronti dei modelli, due significati distinti tra loro connessi: uno è il significato generale di rappresentazione pittorico-comportamentale, l'altro si riferisce più specificamente alla capacità che certi modelli hanno di suggerire direttamente una soluzione come quella che si impone per la sua evidenza».
È in questo tipo di modello che si crea una corrispondenza diretta tra la situazione proposta e il concetto matematico che si sta utilizzando.
Si possono formare cioè dei modelli che finiscono con l'avere molta forza di persuasione e molta rilevanza nelle competenze dell'allievo: in altre parole sono dominanti sul piano intuitivo proprio grazie a questa rispondenza tra situazione descritta e matematica utilizzata per farlo: «Un modello intuitivo (…) induce sempre effetti di accettazione immediata. (…) Se il modello è realmente buono e se è stato realmente ben compreso, le sensazioni di evidenza e di certezza sono imposte dal modello stesso come un fatto globale colto in un'unica comprensione sintetizzante» (Fischbein, 1985a).
Ma non è detto che questo modello rispecchi il concetto in questione; in questo caso ci si scontra, talvolta, con modelli creatisi con la ripetizione, ma niente affatto auspicati: «Molte delle difficoltà che gli studenti incontrano nella scienza e nella educazione matematica sono dovute all'influenza dei modelli intuitivi impliciti che risultano essere incontrollati nel ragionamento matematico» (Fischbein, 1992a).
Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di divisione tra naturali ed avendolo erroneamente esteso ai razionali, si forma quel modello "parassita" che si può enunciare così: la divisione "diminuisce sempre"; misconcezione messa in evidenza da classici studi come Hart (1981), Tirosh, Graeber (1990), Fischbein (1998). In quest'ultimo lavoro l'autore parla di coercizione a proposito della "divisione che rende più piccolo": «Le intuizioni esercitano un effetto coercitivo sulle strategie di ragionamento dell'individuo e sulle sue scelte di ipotesi e di soluzioni. Questo significa che l'individuo tende a rifiutare interpretazioni

[6] Qui e nel seguito i corsivi delle frasi di Fischbein replicano quelli dell'Autore.

alternative, quelle che contraddirebbero le sue intuizioni» e continua riferendosi all'esempio della divisione: «Si erano abituati a questa convinzione dalla loro infanzia quando facevano operazioni solo con i numeri naturali (per i quali questa convinzione è corretta). Più avanti, anche dopo aver appreso la nozione dei numeri razionali (cioè includendo anche frazioni sub-unitarie) essi hanno continuato a ritenere valida la stessa convinzione – che ovviamente non corrisponde più a verità».

In Fischbein, Deri, Nello, Marino (1985) si ritiene inoltre che «per la divisione, si possono considerare due modelli primitivi di base: la divisione di partizione e quella di contenenza (misurazione)». Nello stesso articolo viene messo in evidenza quanto è frequente la misconcezione basata sulla convinzione che in una divisione A:B, il numero B *deve* essere minore del numero A: «L'operazione di divisione è rappresentata, innanzitutto, dall'azione di dividere una collezione di oggetti in un numero di sottocollezioni. Questa è una semplice, concreta, elementare operazione, ma impone un numero di limitazioni: il divisore deve essere un numero intero più piccolo del dividendo, e anche il quoziente deve essere più piccolo del dividendo. Un problema in cui i numeri non hanno questi ruoli non ha diretta soluzione intuitiva». Questi sono solo alcuni dei numerosi aspetti messi in evidenza da Fischbein e dai suoi collaboratori anche tramite esempi, dai quali emerge il seguente fondamentale aspetto: «Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no» (Fischbein, 1985b). Per un approfondimento si vedano anche Deri, Nello, Marino (1983) e D'Amore (1999) dove sono stati riassunti i lavori di Fischbein.

Ricordiamo inoltre Vergnaud (1983) che considera la moltiplicazione e la divisione come parti del ragionamento moltiplicativo. Per l'autore, poiché i concetti sono interconnessi e rappresentano componenti delle conoscenze degli studenti relative a strutture moltiplicative, risulta difficile studiarle e considerarle separatamente. Questa convinzione è stata ripresa da Gagatsis e Christou (2000) che, facendo uso dei TEPs (testi elaborati in modo autonomo dagli studenti), hanno studiato le concezioni degli studenti dagli 8 ai 12 anni su moltiplicazione e

divisione simultaneamente e l'impatto dei loro modelli intuitivi sulle conoscenze concettuali e algoritmiche possedute.
Zazkis (1998) dedica il suo studio alla polisemia nella pratica matematica scolare, in particolare si occupa dei termini "divisore" e "quoziente" e mostra come effettivamente vi sia ambiguità nell'uso di tali termini e come questi si riflettano pesantemente nella pratica scolare, nel linguaggio d'aula e nell'apprendimento.
Ricordiamo inoltre alcuni lavori che hanno inciso indirettamente nella seguente analisi.
La ricerca di Bonotto (1992) effettuata su allievi di V primaria e I media e che ha messo in evidenza come la conoscenza dei numeri naturali è allo stesso tempo supporto e ostacolo all'apprendimento delle frazioni e dei numeri decimali.
Da questo punto di vista, Brousseau (1983) ha dimostrato che, per i bambini della primaria, i numeri decimali sono dei "naturali con la virgola". Oggi, grazie alla ricerca, si sa che questa concezione è assai radicata e persiste talvolta fino all'università; essa costituisce un ostacolo didattico piuttosto diffuso alla comprensione dei numeri reali. Fondamentali da questo punto di vista risultano i classici lavori di Brousseau (1980, 1981) dedicati alla didattica dei numeri decimali.
L'analisi di Gray (1993) mette in evidenza le problematiche che si incontrano nel passaggio dai numeri naturali alle frazioni, con relative difficoltà sia matematiche che di apprendimento. Ricchissima da questo punto di vista è inoltre la bibliografia contenuta in Fandiño Pinilla (2005b) che presenta un fondamentale panorama delle ricerche concernenti le frazioni, oltre a profonde considerazioni didattiche su questo tema.

3. Domande di ricerca

Le domande relative alla presente ricerca sono le seguenti:
D1. Alcuni insegnanti di scuola primaria possiedono misconcezioni relative al concetto di divisione? Se la risposta a tale domanda risulta affermativa, di che tipo sono tali misconcezioni? In particolare, gli insegnanti intervistati sanno considerare in modo appropriato tale argomento in relazione ai diversi insiemi di definizione delle operazioni considerate?
D2. Se alcuni insegnanti dimostrano di possedere misconcezioni relative alla domanda D1, quali sono le cause che le hanno generate?

4. Ipotesi di ricerca

Le ipotesi relative alle domande di ricerca sono le seguenti:
I1. A nostro parere alcuni insegnanti di scuola primaria possiedono misconcezioni relative alla operazione di divisione, già messe classicamente in evidenza dalla letteratura, come: concepire la divisione esclusivamente come ripartizione, concepire il dividendo sempre maggiore del divisore, credere che la divisione sia sempre possibile anche quando il divisore è 0, … Inoltre, ipotizziamo che diversi insegnanti parlino di divisione senza consapevolezza dell'importanza che ha l'insieme di definizione nel quale operano.
I2. Tra le cause della presenza di tali misconcezioni riteniamo che incidano la mancanza di sapere disciplinare e di consapevolezza per questo argomento, oltre alla prassi ormai consolidata di effettuare "divisioni con resto" nell'insieme dei numeri naturali senza conoscere la natura e il senso di tale scelta. Inoltre, l'impostazione dei libri scolastici, manuali, quaderni operativi, basati su termini e proposte fuorvianti rispetto al sapere in gioco, possono favorire lo sviluppo di modelli scorretti.

5. Metodologia di ricerca

La raccolta dei dati sperimentali è avvenuta con l'ausilio del questionario riportato in allegato che è stato completato individualmente da parte di ciascun insegnante; tale questionario ha rappresentato il punto di partenza per far riflettere e far nascere un successivo scambio di opinioni realizzato subito dopo attraverso un colloquio tra i due ricercatori e ogni singolo insegnante.
Il questionario è costituito da domande pensate per far entrare gli insegnanti in questa tematica e per permettere ai ricercatori di rilevare l'eventuale presenza di misconcezioni, legate a concetti presenti nella matematica scolastica che concernono l'operazione di divisione riferita agli insiemi numerici N e Q, la relazione di divisibilità e la scelta dei termini specifici usati per indicare i vari oggetti matematici coinvolti.
Il questionario è stato quindi il punto di partenza per la rilevazione delle eventuali misconcezioni degli insegnanti, mentre il successivo colloquio ha permesso di effettuare un'analisi più dettagliata e approfondita di tali problematiche e ha permesso di indagare se le eventuali misconcezioni venivano esplicitate in classe.

La tecnica utilizzata nel colloquio è stata la discussione attiva sulla base delle risposte alle domande del questionario. Si è cercato di mettere in evidenza contraddizioni, misconcezioni, modelli intuitivi radicati, convinzioni e considerazioni legate alle personali conoscenze relative al sapere e alla pratica didattica. Questa fase è stata registrata quando era possibile, mentre quando non lo era, uno dei due ricercatori trascriveva la discussione.
La fase colloquiale è risultata determinante e più significativa del solo questionario; in effetti, già da interviste informali iniziali effettuate con insegnanti diversi da quelli rientranti in questa analisi, si è notato come un test scritto, da solo, non possa far emergere in modo soddisfacente le vere convinzioni e i modelli intuitivi posseduti dagli insegnanti.
Per nessuna delle due fasi: questionario e colloquio, si è dato un limite di tempo.
Il campione scelto per questa ricerca si compone di:

- 41 insegnanti del Canton Ticino (Svizzera) così suddivisi: 7 di Lugano, 16 di Minusio, 10 di Locarno e 8 di Ascona;
- 32 insegnanti piemontesi di cui 8 di Trivero, 5 di Valle Mosso, 8 di Gozzano e 11 di Romagnano.

6. Risultati di ricerca

Le categorie di risposte che sono state individuate dai 73 questionari e colloqui sono di seguito riportate, accompagnate dalle frequenze relative totali e da quelle del Canton Ticino e del Piemonte espresse in percentuali; queste ultime sono state commentate mostrando le differenze dei risultati dei due paesi solo nei casi più evidenti e interessanti.

6.1. Risultati del questionario e del colloquio

Osserviamo preliminarmente che le categorie delle risposte sono state create a posteriori in base ai risultati ottenuti dai questionari eccetto per le domande 9) e 10) dove le categorie emergono dai termini usati nei libri di testo.[7]

---

[7] Occorre tener conto che ad alcune domande gli insegnanti non rispondono (percentuale molto irrisoria), mentre ad altre rispondono rientrando in più categorie, quindi il totale degli insegnanti per ogni categoria può essere minore o maggiore dei 73 insegnanti intervistati. Questa è anche la ragione principale che ci ha indotto a

Risposte alla domanda 1): Che cos'è per te la divisione nell'insieme dei numeri naturali?

1)	a) Operazione che serve a ripartire / ripartire in parti uguali	b) Operazione che serve per vedere quante volte un numero è contenuto in un altro/situazione di contenenza	c) Operazione che permette di stabilire un rapporto tra due numeri/una frazione	d) Operazione aritmetica	e) Operazione inversa della moltiplicazione
Piemonte (I)	65,9%	28,9%	0,0%	2,6%	2,6%
Ticino (CH)	52,0%	18,0%	6,0%	20,0%	4,0%
Totali	58,0%	22,7%	3,4%	12,5%	3,4%

Totali

a)[8] Questa categoria è di gran lunga la più diffusa e mette in evidenza un modo corretto di concepire la divisione, ma restrittivo se concepito come l'unico modello intuitivo di tale operazione (Fischbein, 1985a): «Il significato intuitivo del concetto di divisione in senso matematico sta nell'atto di suddividere una certa quantità in parti uguali. (…) Tale suddivisione comporta la sensazione che l'effetto derivi ovviamente e necessariamente dall'operazione: si ottengono proprio n parti, ciascuna delle quali più piccola dell'intero». Come emerge dalle affermazioni degli insegnanti, tale interpretazione non è legata all'aspetto matematico del sapere in gioco ma a situazioni problematiche inerenti il contesto quotidiano che viene proposto in classe. Per la maggioranza degli insegnanti è una operazione che permette di ripartire in parti uguali, mentre per altri non è necessario che la ripartizione avvenga in parti uguali: «È una operazione matematica tendente a ripartire una quantità in parti non necessariamente uguali»; questo mette in evidenza come l'operazione di divisione sia considerata in senso generico come l'atto di "frangere", cioè di "spezzare". In effetti, il concetto di ripartizione è spesso espresso usando sinonimi: «Operazione che permette di

considerare le frequenze relative percentuali al posto di quelle assolute.

[8] Per un solo insegnante di questa categoria la divisione non è un'operazione, dato che considera operazione esclusivamente l'algoritmo eseguito in colonna.

suddividere»; «Il formare dei gruppi», idea espressa da un altro insegnante con: «Trovare sottoinsiemi uguali in numero pari a quello proposto»; «Operazione che distribuisce»; «Separazione, distribuzione di quantità». Un solo insegnante parla di: «Sottrazione ripetuta» e in seguito aggiunge la ripartizione. C'è chi parla già di resto: «È una partizione alla fine della quale si trova il valore di ciascuna parte equivalente ed eventualmente un resto. Non sempre è ottenibile un risultato "definitivo"».

b) Risposta apparentemente più matematica come formulazione, dato che sembra richiamare i concetti di multiplo e divisore, ma il linguaggio usato è "empirico" e il termine "contenuto" viene interpretato semplicemente come situazione di contenenza. Alcuni in effetti esplicitano: «Individuare quante volte un numero può contenere un altro numero, ossia una situazione di contenenza»; «Capire quante volte il divisore sta nel dividendo, la contenenza». In questa categoria rientrano anche gli insegnanti che esplicitano esclusivamente la situazione di contenenza: «Contenenza di quantità rispetto ad un'altra».

Come emerge dai risultati, questo modello intuitivo della divisione è meno diffuso rispetto a quello di ripartizione, e ciò era già stato osservato da Fischbein (1985b): «Il modello di partizione sembra essere intuitivamente più accessibile del modello di contenenza, dal momento che l'idea di divisione è legata in modo assai stretto all'idea di partizione». Il modello di contenenza sembra allontanarsi di più dall'immagine intuitiva di divisione, in quanto richiama in alcuni casi un'immagine di accrescimento di quantità: si mettono insieme tanti elementi finché non si raggiunge la quantità totale assegnata.

Alcuni insegnanti citano sia la ripartizione che la contenenza, per questo rientrano in entrambe le categorie a) e b).

c) In questa categoria rientrano insegnanti che considerano la divisione come rapporto, scegliendo così una particolare interpretazione: «È un'operazione che permette di stabilire un rapporto o proporzione tra due numeri»; in altri casi affermano che la divisione è una frazione, confondendo così una operazione con un numero. Gli insegnanti che rispondono in questo modo aumentano durante il colloquio; in effetti alcuni intervistati precisano in questa occasione che la divisione può essere considerata anche come una frazione.

d) Risposta incompleta e insufficiente per caratterizzare la divisione;

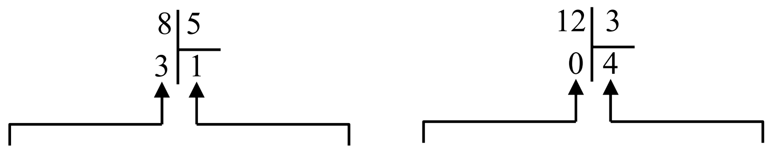
questa descrizione è inerente a una qualsiasi delle infinite[9] operazioni che si possono definire nell'insieme dei numeri naturali.
e) Per molti insegnanti la divisione è considerata come l'operazione inversa della moltiplicazione e tale scelta è ritenuta da coloro che rientrano in questa categoria la più adatta per introdurre questo sapere a scuola. Eppure tale risposta, se considerata come definizione di divisione, risulta scorretta dato che la moltiplicazione da N×N su N è una funzione non iniettiva, perciò non può possedere l'inversa; ciò nonostante, nella scuola, è un modo molto diffuso di presentare la divisione. Dalle risposte degli insegnanti non emerge nessuna motivazione al termine "inversa".
Solo durante l'intervista, in due casi [uno rientrante in questa tipologia e uno nella a)], viene esplicitato che la scrittura a:b=c è equivalente alla scrittura c×b=a. Non viene mai precisato che b debba essere diverso da zero.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte

Sia in Canton Ticino che in Piemonte risulta più alta la percentuale di chi interpreta la divisione come ripartizione in parti uguali (o non uguali) rispetto alle altre categorie, con una percentuale maggiore in Italia. Circa il doppio degli insegnanti piemontesi rispetto ai ticinesi considera la divisione come l'operazione che serve per vedere quante volte un numero è contenuto in un altro, considerando in molti casi una situazione di contenenza. Risulta molto più alta la percentuale degli insegnanti ticinesi che scelgono la risposta generica d), senza riuscire a essere più precisi neanche nell'intervista.

Risposte alla domanda 2): Considera le due seguenti operazioni nell'insieme dei numeri naturali. Con quali termini chiami i numeri indicati con le frecce?[10]

[9] La cardinalità dell'insieme delle operazioni possibili da $N \times N \longrightarrow N$ è addirittura $3^{\aleph_0}=c$, cioè ha la cardinalità del continuo.
[10] Con i due casi di operazione si voleva vedere se gli insegnanti considerano in modo distinto le due divisioni indicate in base al risultato che si ottiene, inizialmente analizzando il punto di vista terminologico, e nelle domande successive l'aspetto concettuale.



2)	a) Resto e quoziente in entrambi i casi	b) Resto e risultato in entrambi i casi	c) Resto, quoziente, quoto	d) Resto, quoziente; niente (non c'è resto), quoto
Piemonte (I)	0,0%	0,0%	93,1%	6,9%
Ticino (CH)	9,8%	39,0%	48,8%	2,4%
Totali	5,7%	22,9%	67,1%	4,3%

Totali

a) e b) Una significativa percentuale di insegnanti usa lo stesso termine per parlare del risultato nei due esempi di divisione: quoziente o risultato: «Io uso il quoziente indistintamente. Quoto deriva da reminiscenze del passato scolastico che non uso perché non do importanza alle parole». Chi fa questa scelta potrebbe concepire unicamente la "divisione con resto" e il resto zero come un suo caso particolare, ma poi spesso parla di operazione diversa che chiama "divisione esatta" quando il resto è zero: «È per me sempre quoziente, ma la divisione è esatta in un caso e nell'altro no, sono due operazioni diverse».

c) Le risposte emerse mettono in evidenza che la maggior parte degli intervistati usa termini distinti per il risultato dei due esempi di divisione: «C'è una differenza nei termini che dipende dal resto», ma nella maggior parte dei casi questo uso avviene senza una scelta personale coerente e consapevole del sapere in gioco: «Io cambio a seconda del libro che adotto quell'anno che ne parlo». In particolare, il risultato di una divisione che dà resto zero viene detto quoto, mentre di una divisione che dà resto diverso da zero viene detto quoziente e tale distinzione deriva prevalentemente dalle proposte dei libri di testo italiani: «Sono termini che ho imparato a scuola, che sono scritti sui libri e che uso sempre per insegnare»; «Nell'introduzione fornisco sempre tutti i termini ai bambini, ma li imparano solo quelli bravi». Alcuni

insegnanti chiamano il quoziente: «Quoziente esatto» e uno parla di: «Quoziente o sottomultiplo».
La maggior parte degli intervistati che rientra in questa categoria dichiara che si tratta sempre della stessa operazione per entrambi gli esempi, ciò che cambia è il risultato che comporta nomi distinti: «Sono due operazioni identiche, una è esatta e l'altra no, con una si ottiene un quoziente con l'altra un quoto, ma è la stessa operazione».
d) In questa categoria rientra chi distingue il resto, quando è diverso da zero, dal «niente» o «non c'è resto», quando è zero: «Per me è importante che sappiano fare le divisioni e che capiscano se c'è resto o no». Ossia, vi sono insegnanti che pur concependo la "divisione con resto" non considerano lo zero come tale: «La terminologia cambia per via dello zero, nella seconda ho scritto che non ha resto»; «Se il resto è zero, allora non ce l'ha, la divisione è esatta, ma non saprei dire niente di più»; «In realtà non abbiamo resto, ma con i bambini diciamo che è zero per semplificare anche se non c'è. Quando c'è resto zero la chiamiamo "divisione perfetta"». Lo zero è quindi concepito come nulla, niente, assenza [Da questo punto di vista si veda D'Amore (2007)]. Questo aspetto sarà approfondito nella domanda successiva.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte

Praticamente tutti gli insegnanti piemontesi scelgono la distinzione dell'uso dei termini quoziente e quoto che dipende dal valore numerico del resto, se è diverso da zero o se è zero; percentuale che si riduce nettamente in Canton Ticino. Tale risultato deriva dalle proposte presenti nella maggior parte dei libri di testo italiani per la scuola primaria e secondaria di primo grado.
Questa distinzione dipende dal tipo di risultato e non da una scelta a priori consapevole dell'operazione che si vuole considerare, come si vedrà anche nelle domande successive. Va osservato, inoltre, che la maggioranza di coloro che parlano spontaneamente in questa domanda di due tipi di divisioni distinte: "divisione con resto" e "divisione esatta", rientrano maggiormente nella categoria che usa lo stesso termine per il risultato, quindi sono prevalentemente Ticinesi.

Risposte alla domanda 3):
3.1) Nell'insieme dei numeri naturali, una divisione con resto zero e una con resto diverso da zero hanno lo stesso nome oppure no?
3.2) Se no, quali nomi useresti per la divisione con resto zero?

3.1)	a) Sì	b) No
Piemonte (I)	50,0%	50,0%
Ticino (CH)	42,1%	57,9%
Totali	45,5%	54,5%

3.2)	a) Senza resto	b) Esatta	c) Finita	d) Indicano termini non coerenti con la domanda
Piemonte (I)	21,4%	35,7%	28,6%	14,3%
Ticino (CH)	27,3%	9,1%	12,1%	51,5%
Totali	25,5%	17,0%	17,0%	40,5%

Totali
Dai risultati emerge un'ampia percentuale di insegnanti che differenzia la "divisione con resto zero" rispetto alla "divisione con resto diverso da zero"; in effetti per più del 50% degli intervistati si hanno due divisioni diverse con nomi distinti, anche se in entrambi i casi nella domanda si è esplicitata l'esistenza del resto.
Gli insegnanti che accettano la "divisione con resto" non considerano il caso in cui il resto sia zero; in quest'ultimo caso parlano di un altro tipo di operazione che viene chiamata con un nome diverso: "divisione esatta", "divisione giusta", "senza resto", "finita" o addirittura "divisione quoziente o quoto", mentre quella con resto diverso da zero viene detta: "divisione approssimata", "illimitata", "inesatta" o "non esatta": «Io li esplicito sempre ai bambini i nomi delle operazioni diverse: "divisione finita" o "infinita o periodica"». E, a detta degli insegnanti intervistati, «Questo nome deriva dal risultato» piuttosto che dal tipo di divisione che si considera a priori.
Alcuni insegnanti sostengono: «Per me la divisione esatta o finita si ha quando c'è un'operazione come 7:5 dove il resto è zero perché prima o poi la divisione finisce. Mentre quando la divisione non finisce si dice non esatta»; «Hanno sempre lo stesso nome, ma la divisione che prima o poi dà un resto zero è finita mentre se ha resto diverso da zero, prima o poi porta ad un risultato approssimato». La distinzione proposta dagli insegnanti verte quindi sul processo di iterazione della "divisione euclidea" che comporta due nomi distinti per la divisione stessa: quella

"esatta" che prima o poi darà resto zero e quella "non esatta" che non darà mai resto zero.
Ci sono inoltre alcuni insegnanti che non considerano la "divisone con resto" ma solo la "divisione perfetta", ossia senza resto, ma non tengono conto degli insiemi di definizione: che sia l'insieme N dei numeri naturali o l'insieme Q dei numeri razionali non fa differenza, non conoscendo la distinzione che esiste tra i due insiemi numerici. Il concepire la divisione sempre definita nell'insieme dei numeri naturali è una scelta comune della maggioranza degli intervistati sia che scelga di considerare la "divisione con resto" oppure no.
Durante l'intervista si sono avuti pareri discordanti del tipo: «Non è importante il resto per me, è una divisione punto e basta. Una divisione la posso sempre fare e poi si vedrà che cosa viene» e chi sostiene: «La terminologia cambia poiché il resto condiziona la divisione e avere resto 0 oppure no, fa sì che ci siano due divisioni diverse». Un aspetto che accomuna tutti gli intervistati è dare importanza al risultato e non all'operazione in sé.
Solo in pochissimi casi si è osservata una maggiore consapevolezza: «Io dico che è una divisione nei naturali. Ci sono due livelli, in prima elementare distribuisco le caramelle e se avanza una caramella la divisione non è esatta, più avanti, in terza, quarta e quinta lascio vuote le caselle con il resto. Non possiamo scrivere che fa 2,5 perché non è un naturale. Questi numeri hanno altri nomi che l'uomo ha inventato e questo lo dico ai miei bambini».
In questa e nelle successive risposte degli insegnanti si nota come le affermazioni che scelgono per parlare di divisione dal punto di vista matematico non siano legate esclusivamente al sapere disciplinare ma a situazioni e attività che gli insegnanti propongono in classe agli allievi.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte
Principalmente nel Canton Ticino la divisione con resto zero viene indicata con i termini "quoziente" o "quoto" rientranti nella categoria d), palesando così un evidente eccesso di terminologia, poco usuale. Nel Canton Ticino, però, nessuno dichiara di esplicitare questa distinzione in classe. Sono molto di più i Piemontesi che chiamano la divisione con resto zero "esatta" o "finita".

Risposte alla domanda 4): È la stessa cosa parlare di divisione che non ha resto o divisione con resto zero? Spiega.

4)	a) Sì	b) No
Piemonte (I)	53,3%	46,7%
Ticino (CH)	62,9%	37,1%
Totali	58,5%	41,5%

Totali

Con questa domanda si voleva verificare se gli intervistati sono consapevoli della possibile distinzione tra il definire la “divisione” e la “divisione con resto”[11] come scelta a priori del tipo di operazione che si vuole considerare e non come conseguenza del risultato che si ottiene da essa (resto zero o resto diverso da zero); dove la “divisione” può essere considerata un caso particolare della “divisione con resto”, dato che in quest’ultima è possibile concepire anche il resto zero. Questa consapevolezza di scelta dell’operazione da considerare e dell’importanza dell’insieme numerico in cui è definita non è mai emersa a priori dagli intervistati.

a) Per la maggioranza è la stessa cosa parlare di “divisione che non ha resto” e di “divisione con resto zero”, ritenendoli semplicemente due modi distinti di dire la stessa cosa: «Dire resto zero e non ha resto vogliono dire la stessa cosa»; «Sì, in entrambi i casi la divisione è finita (cioè esatta) e il risultato sarà un numero intero» (per “intero” intende razionale che in forma decimale è costituito da un numero finito di cifre); «Sono uguali. La divisione che non ha resto è “finita” alle unità; quella con resto zero potrebbe avere i decimi, centesimi, ma poi finire». «Tutte e due danno un risultato esatto»; «Sono sempre due divisioni, non c’è differenza»; «Penso che vogliano dire la stessa cosa, perché in entrambi i casi non posso più formare gruppi, sia nella divisione che non ha resto sia in quella con resto zero. Cioè se sono arrivata a zero non posso comunque formare più gruppi, mi devo fermare».

In particolare, al di là dell’insicurezza sul concetto di divisione, emergono misconcezioni sul concetto di zero: «Per precisione sarebbe meglio dire con resto zero ricordando zero come l’insieme vuoto»; «Se sta esattamente dico che non ha resto o ha resto zero»; «Sono sinonimi la divisione che non ha resto e resto zero, dato che zero vale niente»; «25:5=5 resto 0, perché esiste una divisione che non ha resto? Se il resto

[11] Distinzione esplicitata nell’introduzione.

è zero è zero. Se è zero non mi rimane niente. Il niente è zero»; «Sì, perché il niente è come lo zero»; «Sì, perché il niente è lo zero».
b) Per altri insegnanti c'è una certa differenza tra "non ha resto" e "resto zero" e le motivazioni sono varie: «Secondo me non è la stessa cosa in quanto una divisione con resto zero implica il fatto che ci siano stati tutti una serie di passaggi precedenti, invece una divisione che non ha resto non implica passaggi intermedi»; «Divisione che non ha resto è diretta come 30:5=6, mentre con resto zero è meno diretta e prima o poi darà resto zero»; «No, una divisione con resto zero dà un risultato esatto, mentre l'altra dà un risultato con un numero periodico infinito»; «Divisione che non ha resto come: 7:5 che viene 1,4 quindi non ha resto perché è finita. Finita vuol dire limitata. Invece divisione con resto zero è: 12:4 che è 3 con resto zero», un'idea già emersa tra le risposte alla domanda 3) e che si ripresenterà nella 11) e 12). Ancora una volta le risposte sono legate al risultato dell'operazione e non alla operazione che si considera.
La maggioranza di chi dichiara che ci sono differenze non sa spiegare in che senso: «La tecnica di esecuzione è la stessa, ma non penso che siano la stessa cosa, ma non so dire il perché, dico così ad intuito»; «Penso siano due concetti diversi ma non ho saputo spiegare il perché. Nella pratica trovo il resto»; «Credo di no, capisco che ci sono delle differenze ma non so fare a spiegarle. Con gli allievi spiego che è la stessa cosa»; «Direi che non sono la stessa cosa, ma non so. Ah, c'è qualcosa sull'apparente nelle frazioni con resto zero. La divisione con resto zero è una frazione apparente, penso»; «Dipende, se "legata" alle frazioni deve essere senza resto. Penso»; «È più esatto parlare di divisione con resto zero e lo faccio scrivere più che senza resto, ma non so perché». Gli insegnanti manifestano in modo esplicito insicurezza e confusione per questo sapere.
Un insegnante afferma: «Non è la stessa cosa, in un caso si parla di divisione definita e nell'altro di partizione indefinita» senza riuscire a spiegare che cosa intende dire.
I pochi insegnanti consapevoli continuano ad esserlo anche in questa domanda: «Un divisione ha sempre un resto perché anche zero è un numero»; «La divisione con il resto indica un risultato parziale, se proseguo la divisione il risultato diventa un numero decimale. Il risultato parziale lo uso con i bambini prima di passare ai decimali. La divisione con resto zero indica che il dividendo è esattamente divisibile per il

divisore».

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte

Risulta più alta di circa il 10% la percentuale nel Canton Ticino di chi non concepisce la differenza che può esserci tra una divisione che “non ha resto” e una divisione con “resto zero”, che deriva da una scelta a monte del considerare o meno la “divisione con resto” e quindi anche il caso in cui questo resto sia zero.

Risposte alla domanda 5): Qual è il risultato dell’operazione 7:5 definita nell’insieme dei numeri naturali?

5)	a) 1 con resto 2	b) 1,4	c) 1	d) non esiste	e) 1 con resto 4 oppure 1,2
Piemonte (I)	31,0%	62,1%	0,0%	3,4%	3,4%
Ticino (CH)	69,0%	21,4%	7,1%	0,0%	2,4%
Totali	53,5%	38,0%	4,2%	1,4%	2,8%

Totali

a) Una significativa percentuale di intervistati risponde “1 con resto 2” concependo quindi la “divisione con resto” anche se, come vedremo in seguito, nella maggior parte dei casi non rimangono coerenti in tutte le risposte del questionario.
Durante l’intervista un insegnante afferma: «I bambini devono sempre dire con resto 2, se fossero grandi si fa andare avanti con la divisione mettendo la virgola», non considerando che l’operazione era definita nell’insieme dei numeri naturali.
Quattro insegnanti intervistati, che inizialmente rientravano in questa categoria, successivamente sono passati alla c) dichiarando: «Il vero risultato è 1, perché se divido 7 cioccolatini per 5 bambini uno l’hanno tutti, ma faccio segnalare anche il resto»; «Il risultato espresso dipende dalle consegne date con riferimento a quoto o quoziente. I numeri naturali non sono numeri decimali quindi conta il risultato che è 1»; «No, non sono più sicura. Nei naturali il vero risultato dovrebbe essere 1».

b) Questa risposta scelta dalla maggior parte degli intervistati è errata, dato che si è esplicitato che la divisione è definita nell’insieme dei

numeri naturali: «1,4 mi va bene». Di questi insegnanti, due rispondono 1,04 invece di 1,4 compiendo un errore di calcolo.
Molti insegnanti non conoscono le differenze che si hanno per questa operazione, quando si amplia l'insieme N dei numeri naturali per ottenere l'insieme Q dei razionali, ma più in generale da diverse affermazioni di insegnanti emerge come gli insiemi numerici siano sconosciuti: «1,4 per me è un numero naturale 1 e 4»; «Nell'insieme dei numeri naturali, il decimale è compreso quindi posso scriverlo se eseguo la divisione nei naturali».
Anche in questo caso due insegnanti durante l'intervista passano alla categoria c): «Tutto dipende dal resto, se tengo veramente conto solo dei numeri naturali dell'1,4 tengo conto solo dell'1»; «Nei numeri naturali 1,4 non è un naturale. Bastava mettere 1».
Due insegnanti sembrano ritrattare la risposta ma senza certezza: «Ah, nei numeri naturali. 1,4 non è un numero naturale, non avevo interpretato bene la domanda, però forse viene così, non so, nei "numeri naturali" mi pone adesso dei problemi»; «Non so rispondere più, ho il dubbio dei numeri naturali, quali rientrano in essi?».
Due insegnanti durante l'intervista sembrano ritrattare correttamente la risposta scegliendo di non considerare i numeri razionali: «Il risultato viene un numero intero e dei decimali, quindi non è un naturale, mi sono sbagliato»; «1,4 è un decimale, non è un naturale».
c) In questa categoria rientrano coloro che concepiscono l'operazione 5:5 allo stesso modo di 6:5, 7:5, 8:5, 9:5, cioè che operano un troncamento alla cifra delle unità, ottenendo così lo stesso risultato 1 e facendo così una scelta assai distante dalle più comuni interpretazioni di divisione. Questa categoria è stata inizialmente scelta da tre intervistati che, come abbiamo già esplicitato, aumentano durante il colloquio.
d) Risposta scelta da un solo intervistato che sembra non concepire la "divisione con resto", e che mette in evidenza come l'operazione di "divisione" non sia sempre definita nell'insieme dei numeri naturali, ma solo nell'insieme dei numeri razionali: «Non c'è, perché è un numero decimale. Nella tabella della divisione la casella è vuota» ed è lo stesso insegnante che in precedenza risponde con consapevolezza e correttezza.
e) Due insegnanti sostengono che dire 1 con resto 2 è come dire 1,2 e viceversa 1,4 è come dire 1 con resto 4. Uno di loro ribadisce: «1,2 o 1 con resto 2 è la stessa cosa. Quando parliamo con i bambini non distinguiamo numeri naturali o numeri decimali e li trattiamo uguali.

Penso ai numeri interi se penso ai naturali. Ora però mi stanno venendo dei dubbi». Queste specifiche erronee risposte degli insegnanti sono molto sporadiche, ma la mancata conoscenza degli insiemi numerici si manifesta in modo generalizzato nelle diverse risposte fornite dagli intervistati.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte

In questo caso i Piemontesi, più del triplo dei Ticinesi, commettono l'errore di concepire come risultato della divisione 7:5, definita nell'insieme dei numeri naturali, il numero 1,4 pur essendo un razionale. I Ticinesi parlano prevalentemente di resto e rispondono con una percentuale non trascurabile con l'atipica interpretazione di divisione rientrante nella categoria c).

Risposte alla domanda 6): Qual è il risultato dell'operazione 4:3 definita nell'insieme dei numeri naturali?[12]

6)	a) 1 con resto 1	b) 1,3333 infinita	c) $1{,}\overline{3}$	d) 1	e) non esiste	f) 1 con resto 3 oppure $1{,}\overline{1}$	g) 1,03 oppure 1,3
Piemonte (I)	33,4%	13,3%	40,0%	0,0%	3,3%	0,0%	10,0%
Ticino (CH)	72,5%	15,0%	2,5%	7,5%	0,0%	2,5%	0,0%
Totali	55,7%	14,3%	18,6%	4,3%	1,4%	1,4%	4,3%

Totali

Il commento a queste risposte è analogo a quello della domanda 5). Ciò che qui risulta molto evidente, è che per gli insegnanti non sono chiari gli insiemi numerici nei quali si sta considerando l'operazione in oggetto: «I numeri decimali e le frazioni dove si collocano? Dentro o fuori i naturali? Noi non facciamo mai queste cose».

Dalle risposte b), c), f) e g) emerge che per gli insegnanti l'operazione di divisione è sempre risolvibile nell'insieme dei numeri naturali e dà come risultato un numero che in realtà rientra in un altro insieme, quello dei razionali. L'insegnante che prima considerava i decimali come caso

[12] Le domande 5) e 6) pur essendo analoghe, sono state poste entrambe agli insegnanti per rilevare se le due divisioni in oggetto venivano considerate in modo diverso in funzione dei risultati. Tale concetto sarà ripreso nelle domande 9) e 10).

particolare dei naturali continua esplicitando: «Un periodico rientra nei naturali».
A parte coloro che concepiscono la "divisione con resto", un solo insegnante sembra essere completamente consapevole delle sue scelte dichiarando: «Non esiste un numero naturale come risultato di questa divisione. I numeri naturali non sono i numeri con la virgola», che è lo stesso insegnante che risponde con coerenza alla domanda precedente.
Anche in questa domanda si sono verificati alcuni errori concettuali del tipo: risultato 1 con resto 1 è uguale a dire $1,\overline{1}$; viceversa, $1,\overline{3}$ è come dire 1 con resto 3.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte

Il commento a questi risultati è analogo a quello della risposta 5, si nota infatti una coerenza fra queste risposte: chi nella domanda precedente aveva risposto 1,4 ora risponde con $1,\overline{3}$ o "1,33333 infinita" [categorie b) e c)]. Analogamente chi aveva risposto prima considerando il resto continua a rispondere allo stesso modo. Solo in Italia viene contemplato con una bassissima percentuale 3,3% il caso di non esistenza del risultato di queste operazioni; scelta che impone di non considerare la "divisione con resto". Solo in Svizzera si sono verificate risposte che mettono in evidenza che $1,\overline{3}$ viene interpretato come 1 resto 3 e viceversa, 1 resto 1, viene interpretato nello stesso senso di $1,\overline{1}$.

Risposte alla domanda 7): Nell'insieme dei numeri naturali la divisione è sempre definita (eseguibile)? Perché?

7)	a) No, perché a volte c'è il resto e quindi la virgola	b) Sì, sempre	c) Sì, se la divisione è con resto	d) Sì, se il divisore non è zero	e) Sì, se il divide ndo non è zero	f) Solo se il dividendo è maggiore del divisore
Piemonte (I)	37,1%	25,9%	0,0%	7,4%	7,4%	22,2%
Ticino (CH)	26,2%	31,0%	14,2%	19,0%	4,8%	4,8%
Totali	30,3%	29,0%	8,7%	14,5%	5,8%	11,7%

Totali

a)[13] Questa risposta è sostenuta da coloro che non considerano la "divisione con resto": «No, perché se ho un resto passi ad un altro insieme numerico» (insegnante che non considera come possibile resto lo zero); «Il divisore deve essere contenuto nel dividendo: nelle tabelle della divisione mettono sempre che non è eseguibile. Ho tenuto conto dei numeri naturali. Se il risultato è un numero con la virgola non è eseguibile»; «Non sempre, in alcuni casi è impossibile»; «No, perché se c'è un resto si continua nei numeri decimali»; «Perché la tabella della divisione con i numeri naturali interi non si può completare»; «Perché una quantità non è sempre contenuta esattamente in un'altra»; «No, in quanto può accadere che una divisione non sia finita e dunque il risultato sia un numero decimale come 7:5». Nessuno esplicita però che il divisore deve essere diverso da zero.

b) Una percentuale molto vicina alla categoria precedente risponde in questo modo ma non riesce a chiarire le motivazioni che stanno alla base di questa scelta e a parlare consapevolmente di "divisione con resto"; inoltre, non viene preso in considerazione dalla maggior parte degli intervistati che la divisione è definita nell'insieme dei numeri naturali. Alcuni insegnanti affermano: «Tutti i numeri possono essere sempre divisi. I numeri naturali 7:5 possono essere divisi e mi daranno un numero decimale»; «Sì, è sempre eseguibile perché i numeri sono sempre divisibili»; «Sì, sempre anche se viene un numero con la virgola»; «Sì, perché un numero è sempre divisibile per un altro numero. Si può sempre fare»; «Sì, perché aggiungo lo 0 e posso andare sempre avanti» non mostrando consapevolezza di che cosa significa questo procedimento.

Un insegnante afferma: «Il numero corrisponde ad una parte, ad una quantità reale per cui la divisione è sempre possibile anche se avrò dei risultati corrispondenti a quantità piccole»; in seguito continua: «I numeri naturali sono tutti i numeri che corrispondono a una quantità come i numeri negativi che corrispondono a qualcosa di reale. Esempio –1 per una temperatura è sempre eseguibile: posso sempre dividere perché è qualcosa di reale» manifestando una grande confusione nella gestione degli insiemi numerici.

c) Sono molto meno gli intervistati che rispondono che la divisione è

[13] In questa categoria rientra anche il "no" senza motivazione.

sempre eseguibile scegliendo di considerare la “divisione con resto”: «Se parlo di resto sì, è sempre eseguibile ma non è finita»; «Sì, con la possibilità di mettere un “resto”»; «Sì, anche se la divisione non è finita possa avere un risultato preciso considerando il resto. Utilizzando i numeri decimali non sempre il mio risultato è preciso»; «Sì, anche se a volte c’è il resto»; ma non si esplicita mai che il divisore deve essere diverso da zero.

d) Questa risposta è da considerarsi corretta se l’intervistato si è messo nell’ambito della “divisione con resto”: «No, quando il divisore è 0 la divisione non è possibile altrimenti sì». Ma alcuni insegnanti in seguito affermano senza che sia stata posta una domanda esplicita: «Poiché 0:8 non è eseguibile, anche 8:0 non la riesco a fare»; «0:5 non si può fare perché l’eventuale quoto o quoziente ottenuto moltiplicato per il divisore non dà il dividendo. Così anche 5:0»; «7:0 fa 7 perché se 7 lo divido per niente avrò di nuovo 7»; «0 diviso qualcosa non si può mai fare».

e) Qui emerge una notevole confusione legata principalmente all’uso dei termini. Si tratta però di una percentuale molto bassa. Tra questi insegnanti uno afferma: «0:5 è l’unica operazione non eseguibile, lo 0 nella distribuzione non posso distribuirlo. Se non ho niente non posso dividerlo, lo 0 non è divisibile».

f) Chi risponde in questo modo non contempla, fra l’altro, i casi del tipo a:a e dovrebbe rientrare tra coloro che concepiscono la “divisione con resto”, ma, in questo caso non sarebbe necessario che il dividendo sia maggiore del divisore. Fra le risposte più frequenti: «No, se il dividendo è minore del divisore. In tutti gli altri casi è possibile»; «Perché posso sempre dividere un numero per un altro numero se il divisore è minore del dividendo», e in seguito: «Per me tutte le divisioni sono eseguibili però non ho considerato i numeri naturali. Se io ho 5:3 posso farlo ma 3:5 no. Tutte le divisioni si possono fare se il divisore è minore del dividendo per i numeri naturali» manifestando in questo modo misconcezioni evidenti. Un altro insegnante afferma: «Sì, se il dividendo è maggiore del divisore. 5:3 mi fermo al quoziente come risultato finito» e un altro dichiara: «Non sempre, infatti un numero minore diviso per un numero maggiore dà come risultato un numero decimale» come se fosse l’unico caso dal quale si ottiene un numero decimale come risultato.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte

È maggiore la percentuale degli insegnanti piemontesi che considerano la divisione non sempre eseguibile nell'insieme N dei numeri naturali [categoria a)]; scelta che comporta l'esclusione della "divisione con resto". Questa differenza è compensata dalla maggiore percentuale di risposte degli insegnanti ticinesi rientranti nella categoria c). Vi è una maggiore consapevolezza negli insegnanti ticinesi dell'impossibilità di eseguire la divisione se il divisore è zero e minori misconcezioni rispetto agli insegnanti piemontesi per quanto riguarda le categorie e) ed f).

Risposte alla domanda 8) Che cosa si intende con l'espressione «un numero a è divisibile per un numero b» nell'insieme dei numeri naturali?

8)	a) Che il numero b è contenuto un numero x di volte nel numero a	b) Che a:b=c, con c numero (intero) naturale	c) Che la divisione a:b non ha resto / ha resto 0	d) a è multiplo di b	e) a è maggiore di b
Piemonte (I)	70,8%	4,2%	16,6%	4,2%	4,2%
Ticino (CH)	64,1%	0,0%	28,2%	2,6%	5,1%
Totali	66,7%	1,6%	23,7%	3,2%	4,8%

Totali
a) La maggioranza degli intervistati rientra in questa categoria che viene esplicitata in diversi modi: «Il numero a è multiplo del numero b»; «Il numero b è contenuto esattamente nel numero a»; «Si intende che dato un numero che chiamo b, tra i due è possibile operare una divisione perché b è contenuto in a un tot di volte»; «Nel numero a posso formare dei gruppi con il numero b»; «Il numero a è contenuto nella tabellina del numero b».
Alcuni insegnanti non considerano la divisibilità specifica solo dell'insieme dei numeri naturali, come era stato richiesto nella domanda, ma applicabile anche all'insieme dei numeri razionali: «Si intende che il numero a è contenuto n volte nel numero b. Ad esempio 5 è divisibile per 2, perché fa 2,5»; «Che a è il dividendo e può essere diviso o frazionato per b che è il divisore. Non è necessario che sia divisibile esattamente».
In un paio di casi a è stato confuso con b.
Un insegnante di questa categoria durante l'intervista afferma: «Penso

che nei naturali a deve essere maggiore di b, ma devo provare se la regola sta in piedi. Penso proprio di sì» mostrando una misconcezione già citata; un altro insegnante sostiene: «Si intende che un numero si può suddividere in parti più piccole per un certo numero di volte».

b) Spiegazione scelta da un unico insegnante.

c) In questa categoria rientrano risposte del tipo: «Se la divisione dà resto zero. Esempio: 9:3 sta senza resto, quindi il 3 è contenuto esattamente un certo numero di volte in 9»; «Che è possibile ripartire la quantità a in tanti gruppi quanti ne indica b in modo esatto, cioè non "resta" niente»; «6:3, 4:2, ossia numeri che mi danno resto 0. Divisibile lo userei come sinonimo di distribuzione con gli alunni»; «Intendo che è b contenuto in a; lo intendo come numero esatto cioè non dà resto»; «È contenuto senza resto. È possibile fare raggruppamenti uguali senza resto»; «Divisibile in modo da ottenere un risultato e non avere un resto».

d) In questa categoria si punta l'attenzione su multipli e divisori: «Quando a è multiplo di b».

e) Gli stessi insegnanti che in precedenza avevano manifestato misconcezioni continuano ad affermare: «La divisione non è eseguibile solo quando il dividendo è minore del divisore come 3:14. Per un bambino di seconda non è divisibile, mentre negli altri casi si può sempre fare».

Risposte alla domanda 9) Quali dei seguenti termini ti sembrano adatti per denominare la divisione 5:2 nell'insieme dei numeri naturali? Segna con una crocetta quelli che consideri tali. [14] [15]

---

[14] In questa e nella prossima domanda si è voluto indagare se, e come, gli insegnanti avvertono la differenza fra i casi di divisione che hanno risultato decimale finito e quelli che hanno risultato decimale periodico.

[15] Le categorie di risposte presenti in questa e nella successiva domanda sono tutte tratte da libri di testo in uso in Italia nella scuola primaria e secondaria di primo grado a parte "nessuna delle precedenti".

9)	esatta	non esatta	approssimata	corretta	completa	incompleta	propria
Piemonte (I)	22,7%	9,4%	11,3%	7,5%	7,5%	0,0%	1,9%
Ticino (CH)	21,8%	12,5%	6,3%	7,8%	7,8%	6,3%	0,0%
Totali	22,2%	11,1%	8,5%	7,7%	7,7%	3,4%	0,9%
	impropria	finita	infinita	limitata	illimitata	nessuna delle precedenti	
Piemonte (I)	1.9%	22.7%	0.0%	13.2%	0.0%	1.9%	
Ticino (CH)	1,6%	23,3%	0,0%	6,3%	0,0%	6,3%	
Totali	1,7%	23,1%	0,0%	9,4%	0,0%	4,3%	

Totali

La maggioranza degli insegnanti intervistati risponde: “finita”, “esatta”, “limitata”, anche se una buona percentuale sceglie anche il “non esatta” e “approssimata”, che mettono in evidenza il contrario linguistico delle scelte precedenti. Chi rientra nelle categorie “finita”, “esatta”, “limitata” sostiene: «L’ho provata e la divisione termina», quindi nel senso che prima o poi la divisione darà resto zero. «Scelgo finita perché esatta è quando ha resto zero» mentre altri insegnanti sostengono: «Esatta perché prima o poi non ha resto»; «Esatta non posso andare avanti a svolgerla perché non ho resto»; «Scelgo sia corretta che finita: corretta perché termina, finita perché dà come resto 0»; «Io scelgo esatta, propria, finita e limitata perché 5:2 è esatta perché mi dà un resto finito, propria perché la divisione si può fare, ho pensato alle frazioni proprie e improprie, finita perché finisce e limitata perché arriva al risultato e stop. Non importa se rimango nei naturali o nei decimali».

Chi risponde “approssimata”, “non esatta” afferma: «Inteso che non è perfetta», «La divisione mi dà un risultato approssimato»; «Perché c’è resto e viene con la virgola»; «Perché mi dà un resto, ma non sono più sicura perché prima avevo detto che non aveva il risultato perché c’era il resto»; manifestando incoerenze e non sicurezza di scelte. Dell’incoerenza si sono accorte diverse insegnanti alla fine dell'intervista, affermando inoltre di non sapere fare una scelta definitiva.

Risposte alla domanda 10) Quali dei seguenti termini ti sembrano adatti per denominare la divisione 7:3 nell'insieme dei numeri naturali? Segna con una crocetta quelli che consideri tali.

10)	esatta	non esatta	approssi mata	corretta	completa	incomple ta	propria
Piemonte (I)	0,0%	14,6%	22,9%	4,2%	0,0%	2,1%	0,0%
Ticino (CH)	2,8%	15,5%	16,8%	2,8%	0,0%	4,2%	0,0%
Totali	1,7%	15,1%	19,3%	3,4%	0,0%	3,4%	0,0%
	impro pria	finita	infinita	limitata	illimitata	nessuna delle preceden ti	
Piemonte (I)	2,1%	0,0%	33,2%	0,0%	16,7%	4,2%	
Ticino (CH)	2,8%	1,4%	32,3%	0,0%	11,3%	9,9%	
Totali	2,5%	0,8%	32,8%	0,0%	13,4%	7,6%	

Totali

La maggioranza degli intervistati rientra nella categoria "infinita" e "non esatta" e sono gli stessi insegnanti che nella domanda precedente avevano risposto "esatta", "finita" o "limitata"; la motivazione verte sul fatto che questa divisione non darà mai resto zero, mentre la divisione della domanda 9) prima o poi dava resto zero: «Questa divisione va avanti all'infinito, quella di prima si fermava»; «Quella di prima dava resto zero ed era quindi una divisione finita, invece in 7:3 quel resto rimane lì e non sappiamo che cosa farci»; «In questa non si ferma il risultato, quindi è infinita»; «Non finisce mai, ha sempre lo stesso resto». Anche in queste risposte si riscontra che per gli intervistati il tipo di divisione dipende dal risultato che si ottiene e non dal tipo di operazione che viene definita a priori.

Una buona percentuale risponde "approssimata", dando una interpretazione analoga a quella scelta per la stessa categoria nella

domanda precedente: «Inteso che non è perfetta, quindi la devo arrotondare»; «La divisione mi dà un risultato approssimato»; «Perché viene con la virgola come quella di prima»; ma questa volta la percentuale aumenta di più del doppio rispetto alla domanda precedente, perché alcuni insegnanti che interpretavano la divisione 5:2 come “finita” (prima o poi darà resto zero), interpretano 7:3 “approssimata” perché non darà mai resto zero.
Alcuni insegnanti continuano a non dare importanza all’insieme dei numeri naturali N in cui sui è definita la divisione: «Infinita, nel senso che viene un numero periodico». Un insegnante afferma: «Per me 5:2 e 7:3 sono due divisioni equivalenti perché vengono 2 con resto 1. Sono la stessa operazione», prendendo in considerazione le coppie ordinate appartenenti alla stessa classe di equivalenza.

Risposte alla domanda 11) In quale insieme numerico 9:4 ha soluzione? Se ha soluzione, che tipo di numero è?

11)	**a)** In N	**b)** Nei numeri relativi	**c)** In Q (o nei numeri razionali)	**d)** Nei numeri decimali; è un numero decimale/finito/esatto /limitato/completo	**e)** Nei numeri decimali infiniti/ periodici
Piemonte (I)	14,8%	0,0%	7,4%	59,3%	18,5%
Ticino (CH)	0,0%	2,2%	22,2%	64,5%	11,1%
Totali	5,6%	1,4%	16,7%	62,4%	13,9%

Totali
Domanda volutamente vaga pensata allo scopo di indagare se gli insegnanti erano consapevoli dell’importanza di scegliere o conoscere l’insieme di definizione.
a) In questa tipologia rientrano risposte del tipo: «Direi nei naturali dove la divisione rimane sempre con un resto»; «Nei numeri naturali, basta non considerare la parte decimale».
b) Un solo insegnante sceglie questa categoria.
c) Solo il 16,7% degli insegnanti esplicitano l’insieme dei numeri razionali. Pochi con consapevolezza come in questo caso: «Se dico 2,25 sono in Q (decimali) se dico 2 con resto 1 mi colloco in N, dipende dove mi situo».

d) In questa categoria rientrano risposte del tipo: «2,25 è un numero decimale»; «9:4 fa 2, 10:4 è sempre 2 con qualcosa dopo la virgola. 2,25 che è un numero decimale»; «Decimale finito perché non ha resto». Ma alcuni esplicitano: «Io non ho mai capito gli insiemi numerici, per me non hanno significato»; «Non capisco la domanda»; «Non ricordo più i numeri»; «La parola "insieme numerico" non è stata considerata perché il concetto di insieme numerico non mi è chiaro». Un insegnante durante l'intervista dichiara: «2,25 è un decimale quindi è anche un naturale».
e) In questa categoria rientrano gli insegnanti che esplicitano sbagliando che in questo caso le cifre decimali sono infinite.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte
Sono più numerosi gli insegnanti ticinesi che considerano il risultato di 9:4 nell'insieme dei numeri razionali Q, mentre va osservato che diversi degli insegnanti piemontesi, che rispondono che il risultato di 9:4 fa parte dell'insieme dei numeri naturali N, intendono la "divisione con resto".

Risposte alla domanda 12) In quale insieme numerico 7:3 ha soluzione? Se ha soluzione, che tipo di numero è?

12)	a) In N	b) In Q (o nei numeri razionali)	c) Numero non complet o, infinito	d) Nei numeri decimali; è un numero decimale periodico/non finito/infinito	e) Nei numeri periodi ci	f) In R (numer o irrazion ale)
Piemonte (I)	13.0%	8.7%	8.7%	34.8%	34.8%	0.0%
Ticino (CH)	0.0%	0.0%	0.0%	47.2%	36.1%	16.7%
Totali	5.1%	3.4%	3.4%	42.4%	35.6%	10.1%

Totali
La differenza notata da alcuni intervistati tra questa domanda e la precedente è che: «È diverso dall'altro perché questo risultato va avanti»; «Qui il numero non finisce mai, mentre prima sì». Questo comporta che aumenta la percentuale di chi sceglie come insieme numerico in cui rientra il risultato "i numeri decimali e periodici": «Il risultato è un periodico perché ritorna sempre lo stesso numero e non si

ottiene mai zero»; «Un numero periodico infinito che si avvicinerà sempre di più al numero successivo senza giungere comunque al numero decimale "esatto"», affermazione che mette in evidenza una forte misconcezione legata al concepire "il successivo di un numero" in qualsiasi insieme numerico. Questo aumento delle categorie d) ed e) in questa domanda, rispetto alla precedente, comporta una diminuzione nella categoria relativa all'insieme dei numeri razionali Q.
In questa domanda vi è l'errata categoria dei numeri irrazionali, indicata dagli insegnanti con R, che non compariva nella domanda precedente.
In ciascuna categoria si manifesta una grande insicurezza nel fornire le risposte; in effetti, continua ad essere molto diffusa l'ammissione della poca conoscenza degli insiemi numerici. Da osservare l'uso eccessivo di termini diversi da insegnante a insegnante.

Confronto tra Canton Ticino e Piemonte
Ancora una volta, a parte la minoranza (non trascurabile) dei Piemontesi che ritiene che il risultato della divisione 10:3 si trovi in N, che non sempre comporta una scelta consapevole legata al definire una "divisione con resto", gli altri insegnanti forniscono nella maggior parte dei casi risposte accettabili anche se in misura diversa. I Ticinesi che nella domanda precedente avevano risposto nei numeri razionali Q, ora rientrano maggiormente nei numeri periodici, come se i periodici non fossero numeri razionali. Solo i ticinesi scelgono la categoria dei numeri irrazionali, indicandola con R, manifestando una poca chiarezza della distinzione degli insiemi numerici.

6.2. L'incoerenza

Sono numerosi gli insegnanti che dimostrano di essere incoerenti nel rispondere alle diverse domande del questionario e nel fornire precisazioni durante i colloqui.
Riportiamo di seguito a mo' di esempio quattro casi individuali di incoerenza.
- L'insegnante G. alla domanda 5) risponde: "1 con resto 2" concependo quindi la "divisione con resto" e precisando: «Il 2 fa parte del risultato»; alla domanda successiva (il risultato di 4:3) dichiara: «In realtà questo non è un numero, non è un risultato, perché non c'è risultato in N».
- L'insegnante F. nella domanda 3) non considera la "divisione con resto", ma solo la "divisione perfetta", ossia senza resto. Questo

insegnante diventa incoerente nelle domande successive quando afferma che le divisioni si possono sempre fare all'interno dell'insieme dei numeri naturali, indicando ad esempio nella domanda 11) il risultato di 9:4 come rientrante in N, quindi considerando indirettamente il resto, oppure facendo una scelta scorretta dell'insieme di definizione.

- L'insegnante S. nella domanda 4) dichiara che esiste la "divisione con resto" e nella domanda 5) rimane coerente rispondendo che 7:5 dà come risultato "1 resto 2"; in seguito nella domanda 7) risponde che la divisione non è sempre possibile in N perché: «Non sempre si ottiene resto 0».
- L'insegnante A. nella domanda 7) considera la divisione non sempre eseguibile nell'insieme N dei numeri naturali [categoria a)] «perché non sempre viene un risultato esatto», scelta che comporta l'esclusione della "divisione con resto", ma che non si mantiene coerente nelle risposte alle domande 11) e 12) dove dichiara che il risultato di 9:4 e di 7:3 rientra nell'insieme dei numeri naturali N, precisando però: «Io non ho mai conosciuto gli insieme numerici».

Questi sono solo alcuni esempi di incoerenza individuale molto diffusi tra le risposte degli insegnanti e che a volte sono direttamente notati dagli insegnanti stessi. Ad esempio D. nella domanda 9) dichiara che la divisione è "finita": «Perché mi dà un resto, ma non sono più sicura perché prima avevo detto che non aveva il risultato perché c'era il resto».

Le risposte alle domande sono spesso accompagnate da frequenti esplicitazioni di dubbi e insicurezze: «Non mi sento per niente sicura, la divisione non è poi così facile».

6.3. La pratica didattica

Durante il colloquio gli insegnanti dichiarano che quello che hanno risposto è quello che propongono in aula: «Queste cose le propongo sempre ai miei bambini», a parte in modo generalizzato l'esplicitazione degli insiemi numerici in cui è definita un'operazione, che non viene mai presentata in classe: «Di insiemi numerici non parlo mai in classe, anche perché non so neanche io che cosa sono, ma di tutte le altre cose sì». Inoltre, in alcuni casi gli insegnanti dichiarano di non esplicitare ai propri allievi i termini scelti per denominare i diversi tipi di divisione e il risultato della divisione: «I nomi non li so, perché non li presento in classe per non fare confusione», dando così una motivazione che

comporta che ciò che si conosce è esattamente ciò che si propone.
Sono molto numerosi gli insegnanti che rispondono alle domande proponendo situazioni e attività che esplicitano in aula, pur non essendo stato richiesto dai ricercatori. Questo è avvenuto in alcuni casi per cercare una conferma alla propria risposta, o per essere più convincenti, in altri casi perché la situazione coincideva esattamente con ciò che secondo loro era la risposta.
Riportiamo solo alcuni esempi: alla domanda 1) un insegnante risponde: «La divisione è quando uno prende qualcosa e inizia a ripartirlo in tante parti. Io lo mostro sempre ai miei bambini»; alla domanda 2): «In realtà non abbiamo resto, ma con i bambini diciamo che è zero per semplificare anche se non c'è. Quando c'è resto zero la chiamiamo "divisione perfetta"»; alla domanda 4): «Sarebbe bene dire senza resto. Con il termine parziale indico un'operazione con due numeri divisibili che lasciano un resto; il termine parziale lo uso con i bambini per indicare questo: 8:5 =1 direi ai bambini numero parziale e non naturale, prima di arrivare ai numeri decimali»; «Dico sempre che ha resto 0 e lo faccio sempre registrare»; «Penso siano due concetti diversi ma non ho saputo spiegare perché. Nella pratica trovo il resto»; «Se il resto è 0 è 0. Se è 0 non mi rimane più niente: se do 6 pennarelli a due bambini non ho in mano più niente: il niente è 0? Dico che ha in mano niente o che ha 0? Lo 0 è niente? Matematicamente ci sono dei dubbi ma nella realtà no, lo 0 è niente»; alla domanda 5): «1,2 o 1 con resto 2 è la stessa cosa. Quando parliamo con i bambini non distinguiamo numeri naturali o numeri decimali e li trattiamo uguali. Penso ai numeri interi se penso ai naturali. Ora però mi stanno venendo dei dubbi»; «Io specifico "con resto 2" ai bambini, sempre... se fossero grandi si fa andare avanti»; alla domanda 7): «Nelle tabelle della divisione mettono sempre che non è eseguibile. Ho tenuto conto dei numeri naturali. Se il risultato è un numero con la virgola non è eseguibile».
Significativa è la frase di un insegnante che sostiene: «Quello che ho risposto è quello che so e che quindi spiego ai miei bambini, ma mi accorgo di non sapere il perché» e di un altro che sintetizza i dubbi di diversi insegnanti dichiarando di trasferire ai propri allievi le proprie incertezze: «In effetti quando insegno queste cose non mi sento sicura, poveri bambini, per fortuna quest'anno ho una seconda».

7. Risposte alle domande di ricerca

Le risposte alle domande di ricerca sono dunque le seguenti:
R1. Va prima di tutto precisato che il campione di insegnanti considerato è una sorta di ampio *case study* e che i dati vanno letti in tal senso. In questi insegnanti di scuola primaria, sia ticinesi che piemontesi, si sono rivelate misconcezioni relative al concetto di divisione derivanti principalmente dalla mancanza di una scelta a priori del tipo di operazione che intendono considerare: "divisione" o "divisione con resto" e dal non tener presente l'insieme numerico nel quale si sta operando: «Di numeri naturali non ne ho mai parlato, io non parlo degli insiemi». Si riscontrano inoltre misconcezioni evidenziate in letteratura come: il considerare la divisione eseguibile solo quando il dividendo è maggiore del divisore; il non sapere gestire l'uso dello zero in tale operazione; il considerare in modo vincolante ed esclusivo il modello intuitivo di ripartizione, anche se è didatticamente molto importante comprendere e far comprendere agli allievi che determinati concetti matematici possono provenire da modelli intuitivi ed immagini mentali differenti. Emerge inoltre incoerenza nelle scelte degli intervistati, segno che non vi è consapevolezza del sapere in gioco. Sembra valere anche per un certo numero di insegnanti ciò che afferma Fischbein (1985b): «(…) i concetti matematici e le operazioni non si liberano mai completamente dalle interpretazioni intuitive primitive. Tali interpretazioni possono essere controllate, ma probabilmente mai eliminate del tutto».
R2. Le cause di tali misconcezioni, a detta degli insegnanti stessi, risalgono a una mancanza di formazione su questo tema, alla mancanza di conoscenza degli insiemi numerici, alle proposte dei libri di testi che spesso presentano scelte incoerenti e un uso massiccio di terminologia variabile senza chiarirne i significati.

8. Conclusioni

Dai risultati ottenuti con 73 insegnanti di scuola primaria (41 ticinesi e 32 piemontesi), emergono numerose misconcezioni sul concetto di divisione che mettono anche in evidenza diffuse difficoltà nel conoscere e gestire gli insiemi numerici. Emerge inoltre una notevole incoerenza tra una risposta e l'altra fornita da alcuni insegnanti; segno della mancanza di sapere consapevole su questi argomenti. Inoltre, dalla maggioranza delle risposte degli insegnanti, non compare un sapere

concettuale, ma un sapere legato alla pratica didattica; in effetti, gli insegnanti rispondono con affermazioni che coincidono con ciò che esplicitano in classe. Non vi è quindi distinzione tra la conoscenza matematica posseduta dal docente e ciò che viene proposto in aula derivante da una particolare scelta didattica: i due aspetti coincidono. Tuttavia, se non c'è un sapere più profondo e consapevole di quello della pratica didattica, in un certo senso non c'è neppure trasposizione didattica: l'insegnante insegna esattamente quel che sa, nella sua azione docente è al limite culturale.
Le misconcezioni e incoerenze possedute dagli insegnanti per questo sapere derivano spesso, nel caso degli Italiani, dalle proposte dei libri di testo che impiegano numerosi termini, a volte impropri, non accompagnati dalle relative spiegazioni. Riteniamo perciò che, parallelamente alla messa a punto degli aspetti concettuali della divisione, sarebbe importante operare anche una riduzione e uniformazione dei termini da usare in classe.
A detta degli insegnanti, le convinzioni erronee, le insicurezze e le incoerenze emerse su questo argomento vengono, almeno in parte, esplicitate agli allievi durante l'azione didattica. Le origini di alcune difficoltà nell'apprendimento del concetto di divisione da parte degli allievi possono quindi essere non solo di tipo epistemologico, insite nel sapere in gioco, ma anche di natura didattica, derivanti dal sapere scorretto e incompleto posseduto ed esplicitato in classe dagli insegnanti.
Non è certamente errato considerare due tipi di divisione: "divisione" e "divisione con resto", è però pericoloso confonderli; su di essi occorrerebbe lavorare in modo consapevole e coerente, operando scelte ben definite a priori, per dare senso a queste operazioni che dovrebbe essere precisate anche in funzione dell'insieme di definizione che si considera.
Auspichiamo che questo lavoro possa essere un primo passo verso il cambiamento, l'ampliamento e la sistemazione delle proposte didattiche fornite dai libri di testo per questi saperi basilari.

Bibliografia

Bagni G.T. (1994). Numeri e operazioni nel Medioevo: Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478). *La matematica e la sua didattica*. 4, 364–373.

Bonotto C. (1992). Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 15, 5, 415-448.

Brousseau G. (1980). Problèmes de l'enseignements des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques.* 1, 1, 11-59.

Brousseau G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques.* 2, 3, 37-127.

Brousseau G. (1983). *Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathèmatiques.* Thèse de Doctorat d'État. Université de Bordeaux I.

Brousseau G. (1987). Représentations et didactique du sens de la division. In: *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Actes du Colloque de Sèvres Mai 1987. La Pensée sauvage.

Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica.* 3, 353-400.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2007). Lo zero, da ostacolo epistemologico ad ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica*. 4, 425-454.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica.* Bologna: Pitagora. 2, 165-190.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Deri M., Nello M.S., Marino M.S. (1983). Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 6, 6, 6-27.

Fandiño Pinilla M.I. (2005a). Il portfolio di matematica. La matematica si fa in quattro. *Vita Scolastica*. 5, 10-12.

Fandiño Pinilla M.I. (2005b). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fischbein E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.

Fischbein E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Fischbein E. (1992a). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 25-38.

Fischbein E. (1992b). Intuizione e processo informativo nell'attività matematica. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 51-74.

Fischbein E. (1998). Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica. *La matematica e la sua didattica.* 4, 365-401.

Fischbein E., Deri M., Nello M.S., Marino M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education.* 16, 3-17.

Gagatsis A., Christou C. (2000). Investigating student' understanding of multiplication and division by analyzing their textual eigen productions. *Scientia paedagogica experimentalis*. XXXVII, 2, 219-240.

Gray E.M. (1993). The transition from whole numbers to fraction. Relazione presentata all'incontro dell'International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic. Athens (Ga): Università della Georgia.

Hart K. (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: J. Murray.

Sbaragli S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* 5, 2, 49-76.

Tirosh D., Graeber A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teacher' thinking in division. *Journal for research in mathematics education*. 21, 98-108.

Vergnaud G. (1983). Multiplicative structures. In: Lesh R., Landau M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes.* London: Academic Press. 127-174.

Zazkis R. (1998). Divisors and quotients: acknowledging polysemy. *For the learning of mathematics.* 18, 3, 27-29.

Ringraziamo Bruno D'Amore, Mario Ferrari e gli anonimi referee per i preziosi consigli utili per la stesura di questo testo.

Parole chiave: divisione; divisibilità; convinzioni; insegnanti; scuola primaria.

Allegato. Questionario

1) Che cos'è per te la divisione nell'insieme dei numeri naturali?
2) Considera le due seguenti operazioni nell'insieme dei numeri naturali.
Con quali termini chiami i numeri indicati con le frecce?

$$\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$$

3) Nell'insieme dei numeri naturali, una divisione con resto zero e una con resto diverso da zero hanno lo stesso nome oppure no?
Se no, quali nomi useresti per la divisione con resto zero?
4) È la stessa cosa parlare di divisione che non ha resto o divisione con resto zero? Spiega.
5) Qual è il risultato dell'operazione 7:5 definita nell'insieme dei numeri naturali?
6) Qual è il risultato dell'operazione 4:3 definita nell'insieme dei numeri naturali?
7) Nell'insieme dei numeri naturali la divisione è sempre definita (eseguibile)? Perché?
8) Che cosa si intende con l'espressione «un numero a è divisibile per un numero b» nell'insieme dei numeri naturali?
9) Quali dei seguenti termini ti sembrano adatti per denominare la divisione 5:2 nell'insieme dei numeri naturali? Segna con una crocetta quelli che consideri tali.[16]

esatta	
non esatta	
approssimata	
corretta	
completa	
incompleta	
propria	
impropria	
finita	
infinita	
limitata	
illimitata	
nessuna delle precedenti	

[16] Tutti i nomi seguenti sono tratti da libri di testo in uso in Italia nella scuola primaria e secondaria di primo grado a parte "nessuna delle precedenti".

10) Quali dei seguenti termini ti sembrano adatti per denominare la divisione 7:3 nell'insieme dei numeri naturali? Segna con una crocetta quelli che consideri tali.

esatta	☐
non esatta	☐
approssimata	☐
corretta	☐
completa	☐
incompleta	☐
propria	☐
impropria	☐
finita	☐
infinita	☐
limitata	☐
illimitata	☐
nessuna delle precedenti	☐

11) In quale insieme numerico 9:4 ha soluzione? Se ha soluzione, che tipo di numero è?

12) In quale insieme numerico 7:3 ha soluzione? Se ha soluzione, che tipo di numero è?